Hoja 1 Para entregar hasta el 11 de marzo de 2008

1.- Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}, U = \{1, 2, 3, 4, 9\}, V = \{2, 4, 6, 8\}$. Calcular:
(a) $S \cap U$ (b) $(S \cap T) \cup U$ (c) $(S \cup U) \cap V$ (d) $(S \cup V) \setminus U$ (e) $(U \cup V \cup T) \setminus S$
(f) $(S \cup V) \setminus (T \cap U)$ (g) $(S \times V) \setminus (T \times U)$ (h) $(V \setminus T) \times (U \setminus S)$.

2.- Escribir los conjuntos de partes de los siguientes conjuntos:
(1) $\{1, \emptyset, \{a, b\}\}$ (2) $\{\bullet, \triangle, \partial\}$ (3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

3.- Probar las siguientes fórmulas para conjuntos arbitrarios S, T, U y V. (Indicación: Los diagramas de Venn pueden ser muy útiles para aclarar las ideas, pero no sirven para dar una demostración).
(1) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ (2) $(S \setminus (T \cup U) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$ (3) $S \setminus (T \cap U) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
(4) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$ (5) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$.

4.- Sea $S = \{a, b, c, d\}$. $T = \{1, 2, 3\}$, y $U = \{b, 2\}$. ¿Cúales de las siguientes afirmaciones son verdaderas?:

(1) $\{a\} \in S$	(2) $a \in S$	(3) $\{a, c\} \subset S$
(4) $\emptyset \in S$	(5) $\{a\} \in P(S)$	(6) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset P(S)$
(7) $\{a, c, 2, 3\} \subset S \cup T$	(8) $U \subset S \cup T$	(9) $b \in S \cap U$
(10) $\{b\} \subset S \cap U$	(11) $\{1, 3\} \in T$	(12) $\{1, 3\} \subset T$
(13) $\{1, 3\} \in P(T)$	(14) $\emptyset \in P(S)$	(15) $\{\emptyset\} \in P(S)$
(16) $\emptyset \subset P(S)$	(17) $\{\emptyset\} \subset P(S)$	

5.- Probar o demostrar que son falsas las siguientes afirmaciones:
(1) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ (2) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ (3) $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$.

6.- ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas?. ¿Cuáles suprayectivas?. ¿Es alguna de ellas biyectiva?. (Empieza por asegurarte de que todas ellas son, efectivamente, aplicaciones.)
(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(m) = m + 2$ (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $g(m) = 2m - 7$ (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = x - x^3$
(d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $f(x) = x^2 + 4x$ (e) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g(n) = n(n + 1)$ (f) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = +\sqrt{n^2 + 1}$
(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2 + n + 1$ (h) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $g(t) = t/(t + 1)$.

7.- Da ejemplos de aplicaciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de cada uno de los siguientes tipos:
i) Inyectivas pero no sobreyectivas; ii) Sobreyectivas pero no inyectivas; iii) Biyectivas y
iv) Ni inyectivas ni suprayectivas.

8.- Sea A un conjunto *finito*.
a) Demuestra que no existen aplicaciones $f : A \to A$ que sean inyectivas pero no sobreyectivas, ni aplicaciones $g : A \to A$ que sean sobreyectivas pero no inyectivas. Compara con el ejercicio anterior.
b) Si A tiene n elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto $\{f : A \to A \mid f$ es una aplicación biyectiva$\}$?

9.- Sean $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ las aplicaciones definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$. Estudia si son inyectivas o sobreyectivas las aplicaciones siguientes: f, g, $f \circ g$, $g \circ f$.

10.- Se considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(\alpha, \beta) = 3\alpha + 2\beta$. Averigua si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

$\rightsquigarrow$*dorso*

11.- En una tienda hay k clases de postales diferentes. Queremos enviar postales a n amigos (una a cada uno). ¿De cuántas maneras diferentes podemos hacerlo? ¿De cuántas maneras, si queremos que todas las postales enviadas sean diferentes? ¿Y si queremos enviar dos postales diferentes a cada amigo?

12.- Alicia invita a 7 amigos a su fiesta de cumpleaños. Cuando llegan, todos se dan la mano. ¿Cuántos saludos hay en la fiesta?

Después se sientan a cenar, con Alicia en la presidencia. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar?

Después de cenar se disponen a jugar al "trivial.en equipos de dos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar formados los equipos?

13.- En la fiesta del ejercicio anterior se han aburrido de jugar al trivial (siempre hay algún listo que se sabe las respuestas de memoria) y deciden intentar algo más lucrativo como las quinielas (14 partidos con tres resultados diferentes cada uno: 1, X, 2). ¿Cuántas columnas deben rellenar para acertar los 14 partidos?

Como les parece muy caro, deciden preguntar a un adivino, el cual les asegura que en la siguiente jornada no van a salir signos consecutivos iguales. Si el adivino está en lo cierto, ¿cuántas columnas deben rellenar.

14.- ¿Cuántos números distintos de tres dígitos diferentes se pueden formar usando las cifras $\{1, 2, \cdots, 9\}$? ¿Cuántos de estos son números pares? ¿Y cuántos son menores que 468?

15.- ¿De cuantas formas se puede confeccionar una lista de 12 términos con las letras a, b y c de forma que aparezcan 2 a's, 2 b's y 8 c's, y además cada a y cada b tengan una c a ambos lados?

16.- ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 8 y un 9 en su expresión decimal?

17.- Se forman todas las listas de longitud n con los números $\{1, \ldots, 6\}$. Probar que la suma de los números que aparecen en esas listas es par para la mitad de ellas.

18.- Hallar el número de capicúas de k cifras. Demostrar que la suma de los inversos de los números capicúas es finita.

19.- Tenemos $2n$ bolas rojas numeradas y otras $2n$ bolas blancas numeradas. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger, de entre esas $4n$ bolas, un conjunto con n bolas rojas y n blancas?

20.- ¿De cuántas maneras distintas se puede distribuir un grupo de 40 personas en 8 grupos de 5 personas?

21.- ¿En cuántas "manos"distintas de 5 cartas de la baraja española aparecen los cuatro palos?

22.- ¿Cuántas veces debe lanzarse un par de dados para asegurar que la puntación suma se repita?, ¿y para asegurar que alguna puntuación suma aparezca cuatro veces por lo menos?

23.- Sea S un conjunto cualquiera de n números naturales. Probar que existe algún subconjunto de S tal que la suma de sus elementos es un múltiplo de n.

24.- Sea n un número natural primo con 10. Demostrar que n tiene infinitos múltiplos cuyos dígitos son todos unos.

25.- Demostrar que en cualquier reunión siempre hay dos personas que tienen el mismo número de amigos en dicha reunión.
