Historia de las Matemáticas. Capítulo I: Egipto y Babilonia
Tercer Curso de Matemáticas, 2009-2010

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

Octubre de 2009

Características principales de las Matemáticas en el Egipto de los faraones

- Aristóteles dijo que las Matemáticas las comenzaron a cultivar los sacerdotes en Egipto “porque se les permitía el ocio o el tiempo libre.”(Metafísica 981b 23-24)
- Heródoto creía que lo que provocó el nacimiento de la geometría en el antiguo Egipto fue la necesidad de determinar los límites de las tierras después de las crecidas periódicas del Nilo.
- Demócrito llamaba a los matemáticos egipcios “tendedores de cuerdas”(“rope stretchers”)
- Los egipcios atribuían a las Matemáticas origen divino (del dios Toth, según cuenta Platón en Fedro 274 c-d.) Hasta hoy, las Matemáticas se debaten en la polaridad Aristóteles-Platón sobre su origen y naturaleza. Según Aristóteles son creación de la mente humana. Según Platón tienen una naturaleza propia, independiente del ser humano. El platonismo entronca con la tradición de los egipcios.

FUENTES

- El papiro de Moscú. Data de 1850 A.E.C., fue adquirido por Abraham Golenishchev en 1893 y, desde entonces, está en Moscú.
- El papiro Rhind fue copiado de un ejemplar dos siglos anterior, en 1650 A.E.C. por un escriba llamado Ahmes. Fue adquirido en Luxor por Henry Rhind en 1858 y después lo compró el Museo Británico, donde se encuentra desde 1865.
- La expedición de Napoleón a egipto en 1799, aunque fue más bien un fracaso militar, tuvo una gran trascendencia cultural. Entre los tesoros que se trajeron a Europa está la piedra de Rosetta. Su nombre proviene de la localidad de Rashid, donde se encontró. Acabó en el Museo Británico. Recoge un decreto de la época de Ptolomeo V(195 AEC) en tres lenguas (griego, demótico y jeroglífico). Fue descifrada por Thomas Young y Champollion y es la base para la interpretación de los documentos del antiguo Egipto.

Lo más interesante del papiro de Moscú es el problema 14, que da una receta para calcular el volumen del “frustum”o pirámide truncada. La traducción del texto es, aproximadamente: Te dan una pirámide truncada de altura vertical 6 por 4 de base y 2 en la parte superior. Tienes que calcular el cuadrado de 4, con resultado 16. Tienes que encontrar el doble de 4, resultado 8. Tienes que calcular el cuadrado de 2, resultado 4. Tienes que sumar 16, 8 y 4, resultado 28. Tienes que calcular un tercio de 6, resultado 2. Tienes que tomar 28 dos veces, resultado 56. Este es el volumen, lo encontrarás correcto.
Suponemos que se trata de una pirámide cuadrada regular, como las que hoy se encuentran en Egipto.
El frustum es una pirámide con la parte de arriba cortada por un plano paralelo a la base.
Los babilonios sabían que el área de un trapezoide, que puede verse como un triángulo truncado, viene dada por $A = h\frac{a+b}{2}$, donde a y b son las longitudes de las bases superior e inferior y h es la altura.

Supusieron que el volumen del “frustum”sería $V = h\frac{B_1+B_2}{2}$, donde B_1 y B_2 son las bases y h es la altura. Pero esta fórmula ES INCORRECTA. No es la media aritmética la que vale, sino la media de Herón, es decir $\frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$. Esta es la fórmula correcta, está en el papiro de Moscú y Eric Temple Bell la llamó, con gracia, “the greatest egyptian pyramid”.

EJERCICIO 1:

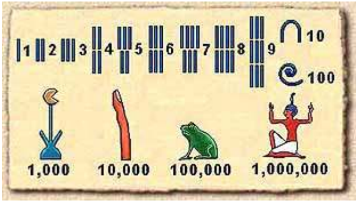
(A) Demostrar que la fórmula del papiro de Moscú para calcular el volumen de la pirámide truncada haciendo el producto de la altura por la media de Herón de las áreas de las bases es correcta.

(B) ¿Que relación hay entre la media de Herón, la media aritmética y la media geométrica de dos números?

Promete mucho ("estudio completo de todas las cosas,.., conocimiento de todos los secretos") ; pero es una colección de 84 problemas resueltos de matemáticas elementales para los aspirantes a escribas.

NÚMEROS

Usaban un sistema decimal no posicional con 7 símbolos diferentes. Escribían los números juntando varios de estos símbolos. Las sumas se efectuaban reagrupando los símbolos.



MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar iban doblando uno de los factores y dividiendo por dos el otro y luego sumaban.

Ejemplo 97×13 :

97	13	✓
194	6	
388	3	✓
776	1	✓

$\Rightarrow 97 \times 13 = 97 + 388 + 776 = 1261.$

EJERCICIO 2:

(A) Comprobar que el resultado es correcto y explicar por qué funciona el método.

(B) Aplicar el método descrito arriba al cálculo de 1359×2578.

DIVISIÓN

Se basa en la misma idea. Supongamos que queremos dividir 329 entre 12. Doblando 12 repetidamente se obtiene la sucesión $12, 24, 48, 96, 192, 384$. Paramos cuando sobrepasamos al dividendo. Entonces $329 - 192 = 137$, $137 - 96 = 41$, $41 - 24 = 17$ y $17 - 12 = 5$. Al final, tenemos

$$329 = 16\cdot12+8\cdot12+2\cdot12+1\cdot12+5 = (16+8+2+1)\cdot12+5 = 27\cdot12+5.$$

Para el área del círculo de radio r usaban la fórmula $\left(\frac{4}{3}\right)^4 r^2$. Teniendo en cuenta que $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3,1604$, no es, para nada, una mala aproximación.

FRACCIONES

Hay varios problemas de fracciones en el papiro Rhind. Tenían un símbolo especial para $2/3$. Todas las demás fracciones las ponían como suma de fracciones unitarias distintas, o sea, fracciones distintas con numerador 1. Por ejemplo:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}; \ \frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}.$$

¿Cuál puede ser el origen de esta peculiar tradición?

- Hay quien sugiere un origen en la necesidad de repartir un número n de cosas, digamos panes, entre m personas.
- Desde el punto de vista de la escritura, sólo tenían que saber poner los recíprocos de los números y lo hacían colocando un signo encima del número, un punto o, en la escritura jeroglífica, un óvalo. No tenían un símbolo para la suma, sencillamente colocaban juntas las fracciones unitarias.

Fracciones

Hay varios problemas de fracciones en el papiro Rhind. Tenían un símbolo especial para $2/3$. Todas las demás fracciones las ponían como suma de fracciones unitarias distintas, o sea, fracciones distintas con numerador 1. Por ejemplo:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}; \quad \frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}.$$

¿Cuál puede ser el origen de esta peculiar tradición?

- Hay quien sugiere un origen en la necesidad de repartir un número n de cosas, digamos panes, entre m personas.
- Desde el punto de vista de la escritura, sólo tenían que saber poner los recíprocos de los números y lo hacían colocando un signo encima del número, un punto o, en la escritura jeroglífica, un óvalo. No tenían un símbolo para la suma, sencillamente colocaban juntas las fracciones unitarias.

FRACCIONES

Hay varios problemas de fracciones en el papiro Rhind. Tenían un símbolo especial para $2/3$. Todas las demás fracciones las ponían como suma de fracciones unitarias distintas, o sea, fracciones distintas con numerador 1. Por ejemplo:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}; \ \frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}.$$

¿Cuál puede ser el origen de esta peculiar tradición?

- Hay quien sugiere un origen en la necesidad de repartir un número n de cosas, digamos panes, entre m personas.
- Desde el punto de vista de la escritura, sólo tenían que saber poner los recíprocos de los números y lo hacían colocando un signo encima del número, un punto o, en la escritura jeroglífica, un óvalo. No tenían un símbolo para la suma, sencillamente colocaban juntas las fracciones unitarias.

Hay varios problemas de fracciones en el papiro Rhind. Tenían un símbolo especial para $2/3$. Todas las demás fracciones las ponían como suma de fracciones unitarias distintas, o sea, fracciones distintas con numerador 1. Por ejemplo:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}; \ \frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}.$$

¿Cuál puede ser el origen de esta peculiar tradición?

- Hay quien sugiere un origen en la necesidad de repartir un número n de cosas, digamos panes, entre m personas.
- Desde el punto de vista de la escritura, sólo tenían que saber poner los recíprocos de los números y lo hacían colocando un signo encima del número, un punto o, en la escritura jeroglífica, un óvalo. No tenían un símbolo para la suma, sencillamente colocaban juntas las fracciones unitarias.

El siguiente resultado aparece en el Liber Abaci de Leonardo Pisano, Fibonacci, publicado en 1202.

Teorema

Toda fracción $\frac{a}{b} < 1$ se puede poner como suma de fracciones unitarias distintas.

Demostración

Vamos a hacer una inducción completa en a. Si $a = 1$, no hay nada que demostrar. Si suponemos que el resultado es cierto para cualquier fracción < 1 con numerador $< a$, para un cierto $a > 1$ y tenemos, ahora, $\frac{a}{b} < 1$, existirá $q \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$. Tenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}.$$

Como $aq - b < a$, la hipótesis de inducción nos dice que $\frac{aq-b}{bq}$ se puede poner como suma de fracciones unitarias distintas. Ninguna es $\frac{1}{q}$ pues $aq - b < a < b \Rightarrow \frac{aq-b}{bq} < \frac{1}{q}$.

El siguiente resultado aparece en el Liber Abaci de Leonardo Pisano, Fibonacci, publicado en 1202.

Teorema

Toda fracción $\frac{a}{b} < 1$ se puede poner como suma de fracciones unitarias distintas.

Demostración

Vamos a hacer una inducción completa en a. Si $a = 1$, no hay nada que demostrar. Si suponemos que el resultado es cierto para cualquier fracción < 1 con numerador $< a$, para un cierto $a > 1$ y tenemos, ahora, $\frac{a}{b} < 1$, existirá $q \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$. Tenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}.$$

Como $aq - b < a$, la hipótesis de inducción nos dice que $\frac{aq-b}{bq}$ se puede poner como suma de fracciones unitarias distintas. Ninguna es $\frac{1}{q}$ pues $aq - b < a < b \Rightarrow \frac{aq-b}{bq} < \frac{1}{q}$.

La demostración anterior, esencialmente de Fibonacci, es el primer ejemplo de algoritmo "greedy" (¿traducción =Voraz?) El término se aplica a algoritmos que buscan una solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. No siempre tienen éxito.

Ejemplo

Vamos a descomponer $\frac{3}{7}$ en fracciones unitaria distintas. La estrategia "voraz" comienza por encontrar la fracción unitaria máxima menor que $\frac{3}{7}$, que es $\frac{1}{3}$, ya que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$. Luego escribimos

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$$

Ahora, $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$ y

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Obtenemos $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

La demostración anterior, esencialmente de Fibonacci, es el primer ejemplo de algoritmo "greedy" (¿traducción =Voraz?) El término se aplica a algoritmos que buscan una solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. No siempre tienen éxito.

EJEMPLO

Vamos a descomponer $\frac{3}{7}$ en fracciones unitaria distintas. La estrategia "voraz" comienza por encontrar la fracción unitaria máxima menor que $\frac{3}{7}$, que es $\frac{1}{3}$, ya que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$. Luego escribimos

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$$

Ahora, $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$ y

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Obtenemos $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

La demostración anterior, esencialmente de Fibonacci, es el primer ejemplo de algoritmo "greedy" (¿traducción =Voraz?) El término se aplica a algoritmos que buscan una solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. No siempre tienen éxito.

EJEMPLO

Vamos a descomponer $\frac{3}{7}$ en fracciones unitaria distintas.La estrategia "voraz"comienza por encontrar la fracción unitaria máxima menor que $\frac{3}{7}$, que es $\frac{1}{3}$, ya que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$.Luego escribimos

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$$

Ahora, $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$ y

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Obtenemos $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

La demostración anterior, esencialmente de Fibonacci, es el primer ejemplo de algoritmo “greedy” (¿traducción =Voraz?) El término se aplica a algoritmos que buscan una solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. No siempre tienen éxito.

EJEMPLO

Vamos a descomponer $\frac{3}{7}$ en fracciones unitaria distintas.La estrategia “voraz”comienza por encontrar la fracción unitaria máxima menor que $\frac{3}{7}$, que es $\frac{1}{3}$, ya que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$.Luego escribimos

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$$

Ahora, $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$ y

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Obtenemos $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

La demostración anterior, esencialmente de Fibonacci, es el primer ejemplo de algoritmo "greedy" (¿traducción =Voraz?) El término se aplica a algoritmos que buscan una solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. No siempre tienen éxito.

Ejemplo

Vamos a descomponer $\frac{3}{7}$ en fracciones unitaria distintas.La estrategia "voraz"comienza por encontrar la fracción unitaria máxima menor que $\frac{3}{7}$, que es $\frac{1}{3}$, ya que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$.Luego escribimos

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$$

Ahora, $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$ y

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Obtenemos $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

La demostración anterior, esencialmente de Fibonacci, es el primer ejemplo de algoritmo "greedy" (¿traducción =Voraz?) El término se aplica a algoritmos que buscan una solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. No siempre tienen éxito.

EJEMPLO

Vamos a descomponer $\frac{3}{7}$ en fracciones unitaria distintas.La estrategia "voraz"comienza por encontrar la fracción unitaria máxima menor que $\frac{3}{7}$, que es $\frac{1}{3}$, ya que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$.Luego escribimos

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$$

Ahora, $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$ y

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Obtenemos $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

- La descomposición en fracciones unitarias distintas no es única. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, siempre podemos transformar una descomposición en otra con más términos, como

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{18} + \frac{1}{231}.$$

- Si no os gusta este ejemplo porque da una descomposición más larga, aquí está este otro:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}.$$

- El algoritmo voraz no siempre da la descomposición más corta. Por ejemplo, con el algoritmo voraz se obtiene

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}$$

y, sin embargo $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510}$.

- La descomposición en fracciones unitarias distintas no es única. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, siempre podemos transformar una descomposición en otra con más términos, como

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{18} + \frac{1}{231}.$$

- Si no os gusta este ejemplo porque da una descomposición más larga, aquí está este otro:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}.$$

- El algoritmo voraz no siempre da la descomposición más corta. Por ejemplo, con el algoritmo voraz se obtiene

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}$$

y, sin embargo $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510}$.

- La descomposición en fracciones unitarias distintas no es única. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, siempre podemos transformar una descomposición en otra con más términos, como

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{18} + \frac{1}{231}.$$

- Si no os gusta este ejemplo porque da una descomposición más larga, aquí está este otro:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}.$$

- El algoritmo voraz no siempre da la descomposición más corta. Por ejemplo, con el algoritmo voraz se obtiene

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}$$

y, sin embargo $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510}$.

EJERCICIO 3:

(A) Aplicar el algoritmo voraz de Fibonacci para expresar $\frac{4}{17}$ como suma de fracciones unitarias distintas.

(B) Comprobar que $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510}$, de donde se sigue que el algoritmo voraz no siempre da la descomposición en un número mínimo de fracciones unitarias distintas.

EJERCICIO 4: Ver que $\frac{8}{11}$ no se puede poner como suma de menos de cuatro fracciones unitarias distintas.

Es notable que hoy en día pueda hablarse de una pequeña área de investigación llamada fracciones egipcias. Como ejemplo, recordemos la conjetura formulada en 1948 por Paul Erdös (1913-1996) y E. G. Straus:

Toda fracción de la forma $\frac{4}{n}$, $n > 4$ puede ponerse como suma de a lo más tres fracciones unitarias distintas.

Se ha comprobado para todo $n \leq 10^{14}$; pero hasta ahora, ni se ha podido demostrar que es cierta para todo n ni se ha podido encontrar un contraejemplo.Para saber más de fracciones egipcias, se puede consultar la página: http://www.ics.uci.edu/eppstein/numth/egypt/

Es notable que hoy en día pueda hablarse de una pequeña área de investigación llamada fracciones egipcias. Como ejemplo, recordemos la conjetura formulada en 1948 por Paul Erdös (1913-1996) y E. G. Straus:

Toda fracción de la forma $\frac{4}{n}$, $n > 4$ puede ponerse como suma de a lo más tres fracciones unitarias distintas.

Se ha comprobado para todo $n \leq 10^{14}$; pero hasta ahora, ni se ha podido demostrar que es cierta para todo n ni se ha podido encontrar un contraejemplo. Para saber más de fracciones egipcias, se puede consultar la página: http://www.ics.uci.edu/eppstein/numth/egypt/

Es notable que hoy en día pueda hablarse de una pequeña área de investigación llamada fracciones egipcias. Como ejemplo, recordemos la conjetura formulada en 1948 por Paul Erdös (1913-1996) y E. G. Straus:

Toda fracción de la forma $\frac{4}{n}$, $n > 4$ puede ponerse como suma de a lo más tres fracciones unitarias distintas.

Se ha comprobado para todo $n \leq 10^{14}$; pero hasta ahora, ni se ha podido demostrar que es cierta para todo n ni se ha podido encontrar un contraejemplo.Para saber más de fracciones egipcias, se puede consultar la página: http://www.ics.uci.edu/eppstein/numth/egypt/

- Junto con Egipto, el otro polo geográfico donde se originaron las Matemáticas que luego florecieron con los griegos y configuraron la cultura europea es Mesopotamia, la tierra fértil comprendida entre los valles de los ríos Eúfrates y Tigris, en lo que hoy es Iraq.
- Desde el cuarto milenio A.E.C. habitaron el sur de Mesopotamia los Sumerios, un pueblo no semita que inventó la escritura cuneiforme, que luego pasó a ser usada por los Acadios y los Babilonios, pueblos semitas que invadieron sucesivamente Mesopotamia y conservaron la cultura sumeria original.
- La escritura cuneiforme consiste en la combinación de unos pocos signos rectos producidos con un clavo o punzón sobre una superficie húmeda de barro, que al secarse, queda fija y se puede conservar por mucho tiempo.

- Junto con Egipto, el otro polo geográfico donde se originaron las Matemáticas que luego florecieron con los griegos y configuraron la cultura europea es Mesopotamia, la tierra fértil comprendida entre los valles de los ríos Eúfrates y Tigris, en lo que hoy es Iraq.
- Desde el cuarto milenio A.E.C. habitaron el sur de Mesopotamia los Sumerios, un pueblo no semita que inventó la escritura cuneiforme, que luego pasó a ser usada por los Acadios y los Babilonios, pueblos semitas que invadieron sucesivamente Mesopotamia y conservaron la cultura sumeria original.
- La escritura cuneiforme consiste en la combinación de unos pocos signos rectos producidos con un clavo o punzón sobre una superficie húmeda de barro, que al secarse, queda fija y se puede conservar por mucho tiempo.

- Junto con Egipto, el otro polo geográfico donde se originaron las Matemáticas que luego florecieron con los griegos y configuraron la cultura europea es Mesopotamia, la tierra fértil comprendida entre los valles de los ríos Eúfrates y Tigris, en lo que hoy es Iraq.
- Desde el cuarto milenio A.E.C. habitaron el sur de Mesopotamia los Sumerios, un pueblo no semita que inventó la escritura cuneiforme, que luego pasó a ser usada por los Acadios y los Babilonios, pueblos semitas que invadieron sucesivamente Mesopotamia y conservaron la cultura sumeria original.
- La escritura cuneiforme consiste en la combinación de unos pocos signos rectos producidos con un clavo o punzón sobre una superficie húmeda de barro, que al secarse, queda fija y se puede conservar por mucho tiempo.

- Junto con Egipto, el otro polo geográfico donde se originaron las Matemáticas que luego florecieron con los griegos y configuraron la cultura europea es Mesopotamia, la tierra fértil comprendida entre los valles de los ríos Eúfrates y Tigris, en lo que hoy es Iraq.
- Desde el cuarto milenio A.E.C. habitaron el sur de Mesopotamia los Sumerios, un pueblo no semita que inventó la escritura cuneiforme, que luego pasó a ser usada por los Acadios y los Babilonios, pueblos semitas que invadieron sucesivamente Mesopotamia y conservaron la cultura sumeria original.
- La escritura cuneiforme consiste en la combinación de unos pocos signos rectos producidos con un clavo o punzón sobre una superficie húmeda de barro, que al secarse, queda fija y se puede conservar por mucho tiempo.

- Se pudo descifrar la escritura cuneiforme a mediados del siglo XIX por Henry Rawlinson y otros pocos lingüistas. Tuvieron la fortuna de encontrar el equivalente de la piedra Rosetta para la escritura cuneiforme, que es un bajorrelieve encontrado en Behistun, en Irán, que data de la época del rey Dario el Grande (522 A.E.C.–486 A.E.C.), y tiene el mismo texto escrito en las tres lenguas oficiales del imperio: Persa antiguo, acadio y elamita.
- Han llegado hasta nosotros cientos de miles de tablillas de barro cocido con inscripciones variadas, muchas con contenido matemático. A las matemáticas que contienen les hemos puesto la etiqueta de Matemáticas de Babilonia, por ser esta ciudad la más importante de toda la zona a partir del segundo milenio A.E.C.. Su máximo poder e influencia hay que situarlos en el reinado de Nabucodonosor II, hacia el 575 A.E.C., poco antes de ser conquistada e incorporada al imperio persa por Ciro el Grande en 539 A. E. C.

- Se pudo descifrar la escritura cuneiforme a mediados del siglo XIX por Henry Rawlinson y otros pocos lingüistas. Tuvieron la fortuna de encontrar el equivalente de la piedra Rosetta para la escritura cuneiforme, que es un bajorrelieve encontrado en Behistun, en Irán, que data de la época del rey Dario el Grande (522 A.E.C.–486 A.E.C.), y tiene el mismo texto escrito en las tres lenguas oficiales del imperio: Persa antiguo, acadio y elamita.
- Han llegado hasta nosotros cientos de miles de tablillas de barro cocido con inscripciones variadas, muchas con contenido matemático. A las matemáticas que contienen les hemos puesto la etiqueta de Matemáticas de Babilonia, por ser esta ciudad la más importante de toda la zona a partir del segundo milenio A.E.C.. Su máximo poder e influencia hay que situarlos en el reinado de Nabucodonosor II, hacia el 575 A.E.C., poco antes de ser conquistada e incorporada al imperio persa por Ciro el Grande en 539 A. E. C.

El sistema de numeración

- Una de las aportaciones más valiosas de la cultura babilónica es el primer sistema de numeración posicional del que se tiene noticia.
- Se trata de un sistema sexagesimal. Es decir, la base es 60.
- Utiliza sólo dos signos: un clavo vertical, que representaremos por Y y que se usa para designar, según su posición $1, 60, 60^2 = 3600, \cdots$ y una cuña $<$ que designa 10, o lo que toque según la posición. En la representación de los números entre 1 y 59 se usa un sistema de base 10, empleando tantas $<$ como decenas y tantos Y como unidades.

Ejemplos

- $< Y \quad << Y \quad < YYY = 11 \cdot 3600 + 21 \cdot 60 + 13 = 39600 + 1260 + 13 = 40873.$
- $55327 = 15 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 7 =< YYYYY \quad << YY \quad YYYYYYY.$

- Una de las aportaciones más valiosas de la cultura babilónica es el primer sistema de numeración posicional del que se tiene noticia.
- Se trata de un sistema sexagesimal. Es decir, la base es 60.
- Utiliza sólo dos signos: un clavo vertical, que representaremos por Y y que se usa para designar, según su posición $1, 60, 60^2 = 3600, \cdots$ y una cuña $<$ que designa 10, o lo que toque según la posición. En la representación de los números entre 1 y 59 se usa un sistema de base 10, empleando tantas $<$ como decenas y tantos Y como unidades.

Ejemplos

- $< Y \quad << Y \quad < YYY = 11 \cdot 3600 + 21 \cdot 60 + 13 = 39600 + 1260 + 13 = 40873.$
- $55327 = 15 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 7 = < YYYYY \quad << YY \quad YYYYYYY.$

- Una de las aportaciones más valiosas de la cultura babilónica es el primer sistema de numeración posicional del que se tiene noticia.
- Se trata de un sistema sexagesimal. Es decir, la base es 60.
- Utiliza sólo dos signos: un clavo vertical, que representaremos por Y y que se usa para designar, según su posición $1, 60, 60^2 = 3600, \cdots$ y una cuña $<$ que designa 10, o lo que toque según la posición. En la representación de los números entre 1 y 59 se usa un sistema de base 10, empleando tantas $<$ como decenas y tantos Y como unidades.

EJEMPLOS

- $< Y \quad << Y \quad < YYY = 11 \cdot 3600 + 21 \cdot 60 + 13 = 39600 + 1260 + 13 = 40873.$
- $55327 = 15 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 7 = < YYYYY \quad << YY \quad YYYYYYY.$

El sistema de numeración

- Una de las aportaciones más valiosas de la cultura babilónica es el primer sistema de numeración posicional del que se tiene noticia.
- Se trata de un sistema sexagesimal. Es decir, la base es 60.
- Utiliza sólo dos signos: un clavo vertical, que representaremos por Y y que se usa para designar, según su posición $1, 60, 60^2 = 3600, \cdots$ y una cuña $<$ que designa 10, o lo que toque según la posición. En la representación de los números entre 1 y 59 se usa un sistema de base 10, empleando tantas $<$ como decenas y tantos Y como unidades.

Ejemplos

- $< Y \quad << Y \quad < YYY = 11 \cdot 3600 + 21 \cdot 60 + 13 = 39600 + 1260 + 13 = 40873.$
- $55327 = 15 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 7 =< YYYYY \quad << YY \quad YYYYYYY.$

- En realidad en las tablillas encontradas, en lugar de *YYYYY* aparece, más bien, algo como $\begin{matrix} YY \\ YYY \end{matrix}$ con los clavos juntos.
- El sistema de numeración evolucionó a lo largo del tiempo. Parece ser que el primitivo sistema de los sumerios, era sólo en parte posicional y tenía símbolos especiales, que resultaron innecesarios cuando, en la época de auge de Babilonia, se llevó el sistema posicional a su culminación. Por ejemplo, en el primitivo sistema sumerio, 600 se escribía $Y\!\!<$ y para 3600 se usaba una especie de rombo formado por cuatro clavos. A este símbolo se le añadía una cuña en el interior para representar 36000.
- Al sistema sumerio-babilónico le faltaban dos elementos esenciales para un sistema posicional: el cero y la coma sexagesimal, o sea, el símbolo que separaría las unidades de los $\frac{1}{60}{}'$s.

- En realidad en las tablillas encontradas, en lugar de *YYYYY* aparece, más bien, algo como $\begin{matrix} YY \\ YYY \end{matrix}$ con los clavos juntos.
- El sistema de numeración evolucionó a lo largo del tiempo. Parece ser que el primitivo sistema de los sumerios, era sólo en parte posicional y tenía símbolos especiales, que resultaron innecesarios cuando, en la época de auge de Babilonia, se llevó el sistema posicional a su culminación. Por ejemplo, en el primitivo sistema sumerio, 600 se escribía $Y\!\!<$ y para 3600 se usaba una especie de rombo formado por cuatro clavos. A este símbolo se le añadía una cuña en el interior para representar 36000.
- Al sistema sumerio-babilónico le faltaban dos elementos esenciales para un sistema posicional: el cero y la coma sexagesimal, o sea, el símbolo que separaría las unidades de los $\frac{1}{60}{}'$s.

¿Un sistema posicional sin 0?

- En realidad en las tablillas encontradas, en lugar de *YYYYY* aparece, más bien, algo como $\begin{matrix} YY \\ YYY \end{matrix}$ con los clavos juntos.
- El sistema de numeración evolucionó a lo largo del tiempo. Parece ser que el primitivo sistema de los sumerios, era sólo en parte posicional y tenía símbolos especiales, que resultaron innecesarios cuando, en la época de auge de Babilonia, se llevó el sistema posicional a su culminación. Por ejemplo, en el primitivo sistema sumerio, 600 se escribía *Y<* y para 3600 se usaba una especie de rombo formado por cuatro clavos. A este símbolo se le añadía una cuña en el interior para representar 36000.
- Al sistema sumerio-babilónico le faltaban dos elementos esenciales para un sistema posicional: el cero y la coma sexagesimal, o sea, el símbolo que separaría las unidades de los $\frac{1}{60}$'s.

La falta de un símbolo para el cero, dio lugar a ambigüedades.

- ¿Como podemos distinguir si *YYY* representa el 3, el 62, el 121, el 3661, $\cdots$? El problema se resolvía escribiendo más juntos los símbolos que corresponden a la misma potencia de 60 y separándolos de los que corresponden a potencias diferentes.
- Pero el problema más grave surge cuando en un número no hay ninguna unidad de un determinado orden. Por ejemplo, si queremos escribir $216032 = 60^3 + 32$ y ponemos $Y \quad <<< YY$, ¿cómo sabemos que no se trata de $60^2 + 32 = 3632$ o de $60 + 32 = 92$. La mera separación espacial es un criterio muy subjetivo, máxime cuando el modo de escribir es manual. Se acabó usando un signo de separación, que, en este aspecto, jugaba el papel de un 0 primitivo. Se escribía

$$92 = Y \; <<< YY, \; 3632 = Y \; \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix} \; <<< YY, \text{ y}$$

$$216032 = Y \; \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix} \; \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix} \; <<< YY.$$

La falta de un símbolo para el cero, dio lugar a ambigüedades.

- ¿Como podemos distinguir si *YYY* representa el 3, el 62, el 121, el 3661, $\cdots$? El problema se resolvía escribiendo más juntos los símbolos que corresponden a la misma potencia de 60 y separándolos de los que corresponden a potencias diferentes.
- Pero el problema más grave surge cuando en un número no hay ninguna unidad de un determinado orden. Por ejemplo, si queremos escribir $216032 = 60^3 + 32$ y ponemos $Y \quad\quad <<< YY$, ¿cómo sabemos que no se trata de $60^2 + 32 = 3632$ o de $60 + 32 = 92$. La mera separación espacial es un criterio muy subjetivo, máxime cuando el modo de escribir es manual. Se acabó usando un signo de separación, que, en este aspecto, jugaba el papel de un 0 primitivo. Se escribía

$$92 = Y \ <<< YY, \ 3632 = Y \ \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix} \ <<< YY, \text{ y}$$

$$216032 = Y \ \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix} \ \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix} \ <<< YY.$$

- Lo que nunca hicieron en Babilonia fue escribir 60 como $Y \begin{array}{c}<\\<\end{array}$.

  Por eso no se puede decir que inventaran el cero como número, sólo como una mejora de la notación para evitar ambigüedades. Incluso hay papiros de la época seleúcida, en que aparece la letra griega *o* (omicron) para facilitar algunos cálculos astronómicos. Pero éso parece sólo una casualidad y se puede afirmar que el cero como número es un invento indio que llegó a Europa por medio de los árabes.
- El sistema sexagesimal sigue presente hoy día en la medida del tiempo, donde dividimos una hora en 60 minutos ("pars minuta prima" para los latinos) y un minuto en 60 segundos ("pars minuta secunda") y también en la medida de ángulos.
- Se ha discutido mucho sobre el origen del sistema sexagesimal de numeración. Tiene el mérito de que al ser la base divisible por $2, 3$ y 5, el recíproco de cualquier número que tenga sólo estos divisores primos, siempre da una fracción sexagesimal que termina. Pero esto es una consecuencia agradable más que un mérito buscado.

- Lo que nunca hicieron en Babilonia fue escribir 60 como $Y \begin{smallmatrix}<\\<\end{smallmatrix}$.

  Por eso no se puede decir que inventaran el cero como número, sólo como una mejora de la notación para evitar ambigüedades. Incluso hay papiros de la época seleúcida, en que aparece la letra griega *o* (omicron) para facilitar algunos cálculos astronómicos. Pero éso parece sólo una casualidad y se puede afirmar que el cero como número es un invento indio que llegó a Europa por medio de los árabes.
- El sistema sexagesimal sigue presente hoy día en la medida del tiempo, donde dividimos una hora en 60 minutos ("pars minuta prima" para los latinos) y un minuto en 60 segundos ("pars minuta secunda") y también en la medida de ángulos.
- Se ha discutido mucho sobre el origen del sistema sexagesimal de numeración. Tiene el mérito de que al ser la base divisible por $2, 3$ y 5, el recíproco de cualquier número que tenga sólo estos divisores primos, siempre da una fracción sexagesimal que termina. Pero esto es una consecuencia agradable más que un mérito buscado.

- Lo que nunca hicieron en Babilonia fue escribir 60 como $Y \begin{smallmatrix} < \\ < \end{smallmatrix}$.

  Por eso no se puede decir que inventaran el cero como número, sólo como una mejora de la notación para evitar ambigüedades. Incluso hay papiros de la época seleúcida, en que aparece la letra griega *o* (omicron) para facilitar algunos cálculos astronómicos. Pero éso parece sólo una casualidad y se puede afirmar que el cero como número es un invento indio que llegó a Europa por medio de los árabes.
- El sistema sexagesimal sigue presente hoy día en la medida del tiempo, donde dividimos una hora en 60 minutos ("pars minuta prima" para los latinos) y un minuto en 60 segundos ("pars minuta secunda") y también en la medida de ángulos.
- Se ha discutido mucho sobre el origen del sistema sexagesimal de numeración. Tiene el mérito de que al ser la base divisible por $2, 3$ y 5, el recíproco de cualquier número que tenga sólo estos divisores primos, siempre da una fracción sexagesimal que termina. Pero esto es una consecuencia agradable más que un mérito buscado.

Se han encontrado varias tablas que se usaban como ayuda en los cálculos. Por ejemplo, en 1854 se encontraron un par de tablas en Senkerah, la antigua Larsa, situada a orillas del Eufrates a 250 km al sur de Baghdad, que se remontan al año 2000 A. E. C. y que dan los cuadrados de todos los números naturales hasta el 59 y los cubos de todos los números naturales hasta el 32. Por ejemplo

$$8^2 = 1,4 = 60 + 4 = 64;\ 59^2 = 58,1 = 58 * 60 + 1 = 3481.$$

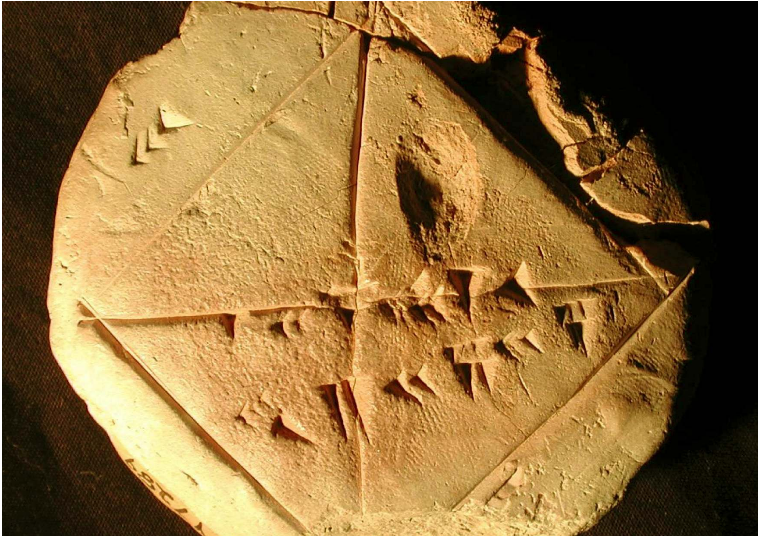
Para multiplicar usaban la fórmula $ab = [(a+b)^2 - a^2 - b^2]/2$ o bien esta otra $ab = [(a+b)^2 - (a-b)^2]/4$.
En cuanto a la división, no tenía un algoritmo como nosotros. Sencillamente, usaban tablas de los recíprocos.

El teorema de Pitágoras

Mencionaremos cuatro tablillas de entre 1900 a 1600 A. E. C. (Imperio Babilónico Antiguo) que demuestran que los babilonios conocían lo que nosotros llamamos Teorema de Pitágoras.

- La tablilla de Yale (YBC 7289) es parte de la "Yale Babilonian Collection". Muestra un cuadrado con las diagonales dibujadas y números grabados, cuyo significado analizaremos.
- La segunda tablilla que estudiaremos es quizá la más importante. Se la conoce como Plimpton 322 y es parte de la colección de la Universidad de Columbia, en Nueva York. Muestra una distribución de números colocados en un arreglo matricial de 15 filas y cuatro columnas. El borde izquierdo tiene restos modernos de pegamento y el trozo que falta nunca se ha encontrado.
- La tablilla de Susa está dedicada a trazar un círculo que contenga a los vértices de un triángulo isósceles.
- La tablilla de Tell Dhibayi fue encontrada cerca de Bagdad en 1962 y se dedica a calcular los lados de un rectángulo conociendo su área y su diagonal.

La tablilla de Yale



Muestra un cuadrado, con el número 30 escrito cerca de uno de los lados, las diagonales dibujadas y, cerca del centro, dos números que podemos escribir con nuestros caracteres, en sistema sexagesimal, como $1, 24, 51, 10$ y $42, 25, 35$. Suponiendo que, en el primero de los números, la "coma sexagesimal," que los babilonios no escribían, debiera ir colocada después del primer 1, al convertir al sistema decimal, obtendríamos: $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} = 1,414212963$. Este número es una buena aproximación de $\sqrt{2} = 1,414213562 \cdots$. Si se multiplica 30 por $1; 24, 51, 10$, se obtiene $42; 25, 35$, que es el otro número que aparece en la tablilla. Así pues, el contenido de la tablilla es que para calcular la diagonal de un cuadrado de lado 30 hay que multiplicar 30 por lo que parece ser una buena aproximación de $\sqrt{2}$.

¿Cómo se obtuvo esta aproximación de $\sqrt{2}$?

Muestra un cuadrado, con el número 30 escrito cerca de uno de los lados, las diagonales dibujadas y, cerca del centro, dos números que podemos escribir con nuestros caracteres, en sistema sexagesimal, como $1, 24, 51, 10$ y $42, 25, 35$. Suponiendo que, en el primero de los números, la "coma sexagesimal," que los babilonios no escribían, debiera ir colocada después del primer 1, al convertir al sistema decimal, obtendríamos: $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} = 1,414212963$. Este número es una buena aproximación de $\sqrt{2} = 1,414213562 \cdots$. Si se multiplica 30 por $1; 24, 51, 10$, se obtiene $42; 25, 35$, que es el otro número que aparece en la tablilla. Así pues, el contenido de la tablilla es que para calcular la diagonal de un cuadrado de lado 30 hay que multiplicar 30 por lo que parece ser una buena aproximación de $\sqrt{2}$.

¿Cómo se obtuvo esta aproximación de $\sqrt{2}$?

¿El método de Herón?

Se ha sugerido, aunque puede ser pura especulación, que los babilonios usaban el método de Herón para aproximar raíces cuadradas: Si $a_1 < \sqrt{R}$, entonces $\frac{R}{a_1} > \sqrt{R}$, y parece razonable considerar $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{R}{a_1}\right)$ y, sucesivamente, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right)$ para aproximar $\sqrt{R}$.

Proposición

Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{R}$.

Demostración

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Si en $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right)$ hacemos tender a_n y a_{n+1} hacia su límite L, resulta $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{R}{L}\right)$, es decir $2L = L + \frac{R}{L}$, o, $L = \frac{R}{L}$, de donde $L^2 = R$. Así pues, $L = \sqrt{R}$.

¿El método de Herón?

Se ha sugerido, aunque puede ser pura especulación, que los babilonios usaban el método de Herón para aproximar raíces cuadradas: Si $a_1 < \sqrt{R}$, entonces $\frac{R}{a_1} > \sqrt{R}$, y parece razonable considerar $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{R}{a_1}\right)$ y, sucesivamente, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right)$ para aproximar $\sqrt{R}$.

Proposición

Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{R}$.

Demostración

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Si en $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right)$ hacemos tender a_n y a_{n+1} hacia su límite L, resulta $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{R}{L}\right)$, es decir $2L = L + \frac{R}{L}$, o, $L = \frac{R}{L}$, de donde $L^2 = R$. Así pues, $L = \sqrt{R}$.

¿El método de Herón?

Se ha sugerido, aunque puede ser pura especulación, que los babilonios usaban el método de Herón para aproximar raíces cuadradas: Si $a_1 < \sqrt{R}$, entonces $\frac{R}{a_1} > \sqrt{R}$, y parece razonable considerar $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{R}{a_1}\right)$ y, sucesivamente, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right)$ para aproximar $\sqrt{R}$.

Proposición

Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{R}$.

Demostración

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Si en $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right)$ hacemos tender a_n y a_{n+1} hacia su límite L, resulta $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{R}{L}\right)$, es decir $2L = L + \frac{R}{L}$, o, $L = \frac{R}{L}$, de donde $L^2 = R$. Así pues, $L = \sqrt{R}$.

Existencia del límite

Se basa en esta proposición, cuya demostración postponemos

Proposición

$T(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{R}{x}\right)$ es una aplicación del intervalo cerrado $I = [(1+\varepsilon)^{-1}\sqrt{R}, (1+\varepsilon)\sqrt{R}]$ en sí mismo que satisface la condición $|T(x) - T(y)| \leq C|x - y| \forall x, y \in I$, para alguna constante $C < 1$. Se dice que T es una aplicación contractiva de I en I.

Demostración de la existencia del límite

Basta ver que a_n es una sucesión de Cauchy, es decir, que $a_n - a_m \to 0$ para $n, m \to \infty$. Como $a_n = T(a_{n-1}) = \cdots = T^{n-1}(a_1)$,

$$|a_n - a_{n+k}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| \leq$$

$$\left(C^{n-1} + C^n + \cdots + C^{n+k-2}\right)|a_1 - T(a_1)| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}C' \to 0 \; n \to \infty.$$

DEMOSTRACIÓN DE QUE T ES UNA APLICACIÓN CONTRACTIVA DE I EN I.

$(1+\varepsilon)^{-1}\sqrt{R} \leq x \leq (1+\varepsilon)\sqrt{R} \Rightarrow (1+\varepsilon)^{-1}\sqrt{R} \leq \frac{R}{x} \leq (1+\varepsilon)\sqrt{R} \Rightarrow T(x) \in I$.

Además $T'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{x^2}\right) \Rightarrow \ \forall x \in I \Rightarrow \sup_{x\in I}|T'(x)| \leq \frac{(1+\varepsilon)^2-1}{2}$. Se sigue que, para ε suficientemente pequeño $\sup_{x\in I}|T'(x)| = C < 1$.

Aplicando el teorema del valor medio, resulta que $\forall x, y \in I,\ |T(x) - T(y)| \leq C|x-y|$ donde, si hemos tomado ε suficientemente pequeño, $C < 1$.

EJERCICIO 5:

(A) Comparar este algoritmo con el método de Newton.

(B) Demostrar que las fracciones x/y obtenidas en la sucesión de aproximaciones de $\sqrt{2}$ dan soluciones enteras de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$.

Proviene de Larsa. Fue comprada por G. Plimpton en 1922 y donada por él a la Universidad de Columbia en los años 1930. Neugebauer y Sacks publicaron su interpretación en 1945. Descubrieron que la tablilla es, en realidad, una lista de ternas pitagóricas.

DEFINICIÓN

- Una terna pitagórica es una terna de números naturales $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, que cumplen la condición $a^2 + b^2 = c^2$.
- Según el recíproco del Teorema de Pitágoras, la identidad $a^2 + b^2 = c^2$ garantiza que existe un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b y cuya hipotenusa mide c. (**EJERCICIO 6**).
- Una terna pitagórica (a, b, c) se llama básica o primitiva si los números a, b, c son coprimos o primos entre sí, es decir, si su máximo común divisor es 1, o, lo que es lo mismo, si no tienen ningún divisor primo común.

La interpretación de la tablilla está dificultada por la falta de un trozo y por la posible presencia de errores de transcripción.Quizá convenga empezar por una transcripción de la tablilla.

En esta transcripción hemos añadido un uno que se supone que falta al comienzo de cada fila, y que estaría en la parte que se ha perdido.

	anchura	diagonal	
1:59:00:15	1:59	2:49	1
1:56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	2
1:55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
1:53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
1:48:54:01:40	1:05	1:37	5
1:47:06:41:40	5:19	8:01	6
1:43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
1:41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
1:38:33:36:36	8:01	12:49	9
1:35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
1:33:45	45	1:15	11
1:29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
1:27:00:03:45	2:41	4:49	13
1:25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
1:23:13:46:40	56	1:46	15

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene 1 : 12 : 01. En la fila 9^a columna 2^a figura 9 : 01. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es 7 : 12 : 01 y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.

La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “anchura ”y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “diagonal”y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.

En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene 1 : 12 : 01. En la fila 9^a columna 2^a figura 9 : 01. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es 7 : 12 : 01 y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.

La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “anchura ”y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “diagonal”y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.

En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene $1:12:01$. En la fila 9^a columna 2^a figura $9:01$. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es $7:12:01$ y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.

La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “anchura ”y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “diagonal”y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.

En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene $1:12:01$. En la fila 9^a columna 2^a figura $9:01$. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es $7:12:01$ y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.
La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como "anchura "y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como "diagonal"y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.
En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene $1 : 12 : 01$. En la fila 9^a columna 2^a figura $9 : 01$. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es $7 : 12 : 01$ y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.

La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como "anchura "y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como "diagonal"y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.

En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene $1:12:01$. En la fila 9^a columna 2^a figura $9:01$. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es $7:12:01$ y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.

La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “anchura ”y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como “diagonal”y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.

En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

La transcripción incorpora cuatro correcciones: En la fila 2^a columna 3^a la tablilla contiene $1:12:01$. En la fila 9^a columna 2^a figura $9:01$. En la fila 13^acolumna 2^a el número original es $7:12:01$ y en la fila 15^a columna 3^a aparece 53.

La tercera columna sólo indica el número de la fila: $1, 2, 3, \cdots, 15$. La segunda columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como "anchura "y puede pensarse que se trata del cateto más pequeño. La tercera columna va encabezada por una palabra que se puede traducir como "diagonal"y podemos suponer que es la hipotenusa. El cateto mayor estaría en la parte de la tablilla que se ha perdido.

En todo caso, una vez admitida la hipótesis de que el objeto de la tablilla es dar una lista de ternas pitagóricas, hay que responder a una serie de preguntas:

- ¿Que significa la primera columna?
- ¿Como encontraron las ternas los autores?
- ¿Por qué escogieron estas ternas y no otras?
- ¿De donde proviene el orden en que aparecen colocadas las ternas?

EJERCICIO 7: En este enunciado nos referimos siempre a la transcripción que hemos dado de la tablilla Plimpton 322.
Si designamos con la letra y los números de la segunda columna (las "anchuras") y con la letra z los números de la tercera (las "diagonales"), se pide

(A) Comprobar que para cada fila, existe un entero $x > y$ tal que $x^2 + y^2 = z^2$.

(B) Comprobar que los números de la primera fila son $\frac{z^2}{x^2}$, o bien $\frac{y^2}{x^2}$ si no se quiere añadir el 1 que se supone que falta al comienzo de cada fila.

Para tratar de contestar a estas preguntas vamos a avanzar en la Historia para ver cómo se pueden encontrar ternas pitagóricas. Empezaremos con el método geométrico de Diofanto.

Supongamos que tenemos una terna pitagórica (a, b, c). Es decir, $a, b, c \in \mathbb{N} \ni a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo por c^2 obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, de forma que si $x = \frac{a}{c}$ e $y = \frac{b}{c}$, (x, y) es un punto del plano con coordenadas racionales que está sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Recíprocamente, cualquier punto (x, y) del círculo unidad que tenga coordenadas racionales $x = \frac{p}{q}, \ y = \frac{r}{s}$, nos proporciona, no sólo una terna pitagórica, sino un conjunto infinito de ellas (psk, qrk, qsk).

En resumen, para encontrar las soluciones enteras de $a^2 + b^2 = c^2$, Diofanto busca las soluciones racionales de $x^2 + y^2 = 1$.

Para tratar de contestar a estas preguntas vamos a avanzar en la Historia para ver cómo se pueden encontrar ternas pitagóricas. Empezaremos con el método geométrico de Diofanto.

Supongamos que tenemos una terna pitagórica (a, b, c). Es decir, $a, b, c \in \mathbb{N} \ni a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo por c^2 obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, de forma que si $x = \frac{a}{c}$ e $y = \frac{b}{c}$, (x, y) es un punto del plano con coordenadas racionales que está sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Recíprocamente, cualquier punto (x, y) del círculo unidad que tenga coordenadas racionales $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, nos proporciona, no sólo una terna pitagórica, sino un conjunto infinito de ellas (psk, qrk, qsk).

En resumen, para encontrar las soluciones enteras de $a^2 + b^2 = c^2$, Diofanto busca las soluciones racionales de $x^2 + y^2 = 1$.

Para tratar de contestar a estas preguntas vamos a avanzar en la Historia para ver cómo se pueden encontrar ternas pitagóricas. Empezaremos con el método geométrico de Diofanto.

Supongamos que tenemos una terna pitagórica (a, b, c). Es decir, $a, b, c \in \mathbb{N} \ni a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo por c^2 obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, de forma que si $x = \frac{a}{c}$ e $y = \frac{b}{c}$, (x, y) es un punto del plano con coordenadas racionales que está sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Recíprocamente, cualquier punto (x, y) del círculo unidad que tenga coordenadas racionales $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, nos proporciona, no sólo una terna pitagórica, sino un conjunto infinito de ellas (psk, qrk, qsk).

En resumen, para encontrar las soluciones enteras de $a^2 + b^2 = c^2$, Diofanto busca las soluciones racionales de $x^2 + y^2 = 1$.

MÉTODOS PARA ENCONTRAR TERNAS PITAGÓRICAS

Para tratar de contestar a estas preguntas vamos a avanzar en la Historia para ver cómo se pueden encontrar ternas pitagóricas.
Empezaremos con el método geométrico de Diofanto.
Supongamos que tenemos una terna pitagórica (a, b, c). Es decir, $a, b, c \in \mathbb{N} \ni \; a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo por c^2 obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, de forma que si $x = \frac{a}{c}$ e $y = \frac{b}{c}$, (x, y) es un punto del plano con coordenadas racionales que está sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.
Recíprocamente, cualquier punto (x, y) del círculo unidad que tenga coordenadas racionales $x = \frac{p}{q}, \; y = \frac{r}{s}$, nos proporciona, no sólo una terna pitagórica, sino un conjunto infinito de ellas (psk, qrk, qsk).

En resumen, para encontrar las soluciones enteras de $a^2 + b^2 = c^2$, Diofanto busca las soluciones racionales de $x^2 + y^2 = 1$.

Permite obtener todas las soluciones racionales de

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

a partir de una dada, digamos $(-1, 0)$. Cualquier otra solución (x_1, y_1) de (1) determina con $(-1, 0)$ la recta $\frac{y}{x+1} = \frac{y_1}{x_1+1} = t \in \mathbb{Q}$, e. d., $y = t(x+1)$, una recta con pendiente racional.

Recíprocamente, cualquier recta con pendiente racional que pase por $(-1, 0)$ cortará al círculo unidad en otro punto de coordenadas racionales. Así salen todas las soluciones racionales de (1).

En concreto, dado $t \in \mathbb{Q}$, resolvemos $x^2 + (t(x+1))^2 = 1$, e. d., $(t^2+1)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$. Resulta $x = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 - (t^4-1)}}{t^2+1} = \frac{-t^2 \pm 1}{t^2+1}$. La nueva solución es, poniendo $t = v/u$

$$x = \frac{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}; \qquad y = \frac{v}{u} \frac{2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

Permite obtener todas las soluciones racionales de

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

a partir de una dada, digamos $(-1, 0)$. Cualquier otra solución (x_1, y_1) de (1) determina con $(-1, 0)$ la recta $\frac{y}{x+1} = \frac{y_1}{x_1+1} = t \in \mathbb{Q}$, e. d., $y = t(x + 1)$, una recta con pendiente racional.
Recíprocamente, cualquier recta con pendiente racional que pase por $(-1, 0)$ cortará al círculo unidad en otro punto de coordenadas racionales. Así salen todas las soluciones racionales de (1).
En concreto, dado $t \in \mathbb{Q}$, resolvemos $x^2 + (t(x + 1))^2 = 1$, e. d., $(t^2 + 1)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$. Resulta $x = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4-(t^4-1)}}{t^2+1} = \frac{-t^2 \pm 1}{t^2+1}$. La nueva solución es, poniendo $t = v/u$

$$x = \frac{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}; \qquad y = \frac{v}{u}\frac{2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

Permite obtener todas las soluciones racionales de

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

a partir de una dada, digamos $(-1, 0)$. Cualquier otra solución (x_1, y_1) de (1) determina con $(-1, 0)$ la recta $\frac{y}{x+1} = \frac{y_1}{x_1+1} = t \in \mathbb{Q}$, e. d., $y = t(x+1)$, una recta con pendiente racional.
Recíprocamente, cualquier recta con pendiente racional que pase por $(-1, 0)$ cortará al círculo unidad en otro punto de coordenadas racionales. Así salen todas las soluciones racionales de (1).
En concreto, dado $t \in \mathbb{Q}$, resolvemos $x^2 + (t(x+1))^2 = 1$, e. d., $(t^2+1)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$. Resulta $x = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 - (t^4-1)}}{t^2+1} = \frac{-t^2 \pm 1}{t^2+1}$. La nueva solución es, poniendo $t = v/u$

$$x = \frac{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}; \qquad y = \frac{v}{u} \frac{2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

A partir de aquí se obtiene la descripción de las ternas pitagóricas mediante las fórmulas

$$a = (u^2 - v^2)w, \; b = 2uvw, \; c = (u^2 + v^2)w, \qquad \text{para } u, v, w \in \mathbb{N}.$$

Esta es, esencialmente, la descripción de las ternas pitagóricas contenida en el Libro X de los Elementos de Euclides. Euclides vivió del 325 al 265 A.E.C. y Diofanto es muy posterior (200-284 E.C.) El método de Euclides es aritmético y lo vamos a detallar a continuación. Euclides da la primera fórmula general de la que se tiene noticia. En todo caso, nuestra pregunta es

¿tenían los babilonios una fórmula general para obtener las ternas pitagóricas de Plimpton 322?

Proposición

Sea (a, b, c) una terna pitagórica básica. Entonces

- a, b y c son primos entre sí dos a dos.
- c es impar y, de los otros dos números a y b, uno es par y el otro impar.

Demostración

- La ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ implica que cualquier divisor de dos de los números a, b y c, ha de dividir al otro.
- Por el punto anterior, uno y sólo uno de los números a, b, c es par. Si c fuera par, a y b serían impares y sus cuadrados darían resto 1 al dividir por cuatro. Pero entonces $c^2 = a^2 + b^2$ daría resto 2 al dividir por cuatro, cuando hemos supuesto que c es par, lo cual implica que c^2 es múltiplo de 4. Se concluye que c es impar.

PROPOSICIÓN

Sea (a, b, c) una terna pitagórica básica. Entonces

- a, b y c son primos entre sí dos a dos.
- c es impar y, de los otros dos números a y b, uno es par y el otro impar.

DEMOSTRACIÓN

- La ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ implica que cualquier divisor de dos de los números a, b y c, ha de dividir al otro.
- Por el punto anterior, uno y sólo uno de los números a, b, c es par. Si c fuera par, a y b serían impares y sus cuadrados darían resto 1 al dividir por cuatro. Pero entonces $c^2 = a^2 + b^2$ daría resto 2 al dividir por cuatro, cuando hemos supuesto que c es par, lo cual implica que c^2 es múltiplo de 4. Se concluye que c es impar.

Proposición

Sea (a, b, c) una terna pitagórica básica. Entonces

- a, b y c son primos entre sí dos a dos.
- c es impar y, de los otros dos números a y b, uno es par y el otro impar.

Demostración

- La ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ implica que cualquier divisor de dos de los números a, b y c, ha de dividir al otro.
- Por el punto anterior, uno y sólo uno de los números a, b, c es par. Si c fuera par, a y b serían impares y sus cuadrados darían resto 1 al dividir por cuatro. Pero entonces $c^2 = a^2 + b^2$ daría resto 2 al dividir por cuatro, cuando hemos supuesto que c es par, lo cual implica que c^2 es múltiplo de 4. Se concluye que c es impar.

PROPOSICIÓN

Sea (a, b, c) una terna pitagórica básica. Entonces

- a, b y c son primos entre sí dos a dos.
- c es impar y, de los otros dos números a y b, uno es par y el otro impar.

DEMOSTRACIÓN

- La ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ implica que cualquier divisor de dos de los números a, b y c, ha de dividir al otro.
- Por el punto anterior, uno y sólo uno de los números a, b, c es par. Si c fuera par, a y b serían impares y sus cuadrados darían resto 1 al dividir por cuatro. Pero entonces $c^2 = a^2 + b^2$ daría resto 2 al dividir por cuatro, cuando hemos supuesto que c es par, lo cual implica que c^2 es múltiplo de 4. Se concluye que c es impar.

Teorema

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de las ternas pitagóricas básicas (a, b, c) con b par. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los pares $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $u > v$, u y v primos entre sí, y uno de ellos par y el otro impar. Entonces la aplicación $(u, v) \overset{f}{\mapsto} (a, b, c) \ni \ a = u^2 - v^2, \ b = 2uv, \ c = u^2 + v^2$ es una BIYECCIÓN de $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{T}$.

Demostración

- $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}$ pues $a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = c^2$. El que de u, v uno sea par y el otro impar, da que a y c son impares. Cualquier divisor primo común de c y a, necesariamente impar, lo sería de $c - a = 2v^2$ y de $c + a = 2u^2$. Entonces, tendría que dividir a u y v, lo cual es imposible. Así pues, a y c son primos entre si y, por tanto, $(a, b, c) \in \mathcal{T}$.
- f es inyectiva. Si $f(u, v) = f(u', v') = (a, b, c)$, e.d. $a = u^2 - v^2 = u'^2 - v'^2$, $b = 2uv = 2u'v'$ y $c = u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2$. $2u^2 = c + a = 2u'^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{c+a}{2}} = u' \Rightarrow v = v'$.
- Finalmente, f es sobreyectiva. Sea $(a, b, c) \in \mathcal{T}$. Sean $U = \frac{c+a}{2}$, $V = \frac{c-a}{2}$. Como $U + V = c$ y $U - V = a$, U y V son primos entre sí. Sea $W = \frac{b}{2} \in \mathbb{N}$. $UV = \frac{c^2-a^2}{4} = \frac{b^2}{4} = W^2$. $\forall p$ primo, $p|U \Rightarrow p|W^2 \Rightarrow (p \not| V) \max\{k \ni p^k|U\}$ es par. Lo mismo le sucede a V. Así $U = u^2$, $V = v^2$, de u, v uno sólo es par y $a = U - V = u^2 - v^2$, $b = 2W = 2uv$, $c = U + V = u^2 + v^2$.

DEMOSTRACIÓN

- $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}$ pues $a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = c^2$. El que de u, v uno sea par y el otro impar, da que a y c son impares. Cualquier divisor primo común de c y a, necesariamente impar, lo sería de $c - a = 2v^2$ y de $c + a = 2u^2$. Entonces, tendría que dividir a u y v, lo cual es imposible. Así pues, a y c son primos entre si y, por tanto, $(a, b, c) \in \mathcal{T}$.
- f es inyectiva. Si $f(u, v) = f(u', v') = (a, b, c)$, e.d. $a = u^2 - v^2 = u'^2 - v'^2$, $b = 2uv = 2u'v'$ y $c = u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2$. $2u^2 = c + a = 2u'^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{c+a}{2}} = u' \Rightarrow v = v'$.
- Finalmente, f es sobreyectiva. Sea $(a, b, c) \in \mathcal{T}$. Sean $U = \frac{c+a}{2}$, $V = \frac{c-a}{2}$. Como $U + V = c$ y $U - V = a$, U y V son primos entre sí. Sea $W = \frac{b}{2} \in \mathbb{N}$. $UV = \frac{c^2-a^2}{4} = \frac{b^2}{4} = W^2$. $\forall p$ primo, $p|U \Rightarrow p|W^2 \Rightarrow (p \nmid V) \max\{k \ni p^k|U\}$ es par. Lo mismo le sucede a V. Así $U = u^2$, $V = v^2$, de u, v uno sólo es par y $a = U - V = u^2 - v^2$, $b = 2W = 2uv$, $c = U + V = u^2 + v^2$.

DEMOSTRACIÓN

- $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}$ pues $a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = c^2$. El que de u, v uno sea par y el otro impar, da que a y c son impares. Cualquier divisor primo común de c y a, necesariamente impar, lo sería de $c - a = 2v^2$ y de $c + a = 2u^2$. Entonces, tendría que dividir a u y v, lo cual es imposible. Así pues, a y c son primos entre si y, por tanto, $(a, b, c) \in \mathcal{T}$.
- f es inyectiva. Si
  $f(u, v) = f(u', v') = (a, b, c)$, e.d. $a = u^2 - v^2 = u'^2 - v'^2$,
  $b = 2uv = 2u'v'$ y $c = u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2$.
  $2u^2 = c + a = 2u'^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{c+a}{2}} = u' \Rightarrow v = v'$.
- Finalmente, f es sobreyectiva. Sea $(a, b, c) \in \mathcal{T}$. Sean $U = \frac{c+a}{2}$, $V = \frac{c-a}{2}$. Como $U + V = c$ y $U - V = a$, U y V son primos entre sí. Sea $W = \frac{b}{2} \in \mathbb{N}$. $UV = \frac{c^2-a^2}{4} = \frac{b^2}{4} = W^2$. $\forall p$ primo, $p|U \Rightarrow p|W^2 \Rightarrow (p \not| V) \max\{k \ni p^k|U\}$ es par. Lo mismo le sucede a V. Así $U = u^2$, $V = v^2$, de u, v uno sólo es par y $a = U - V = u^2 - v^2$, $b = 2W = 2uv$, $c = U + V = u^2 + v^2$.

La representación de las ternas pitagóricas básicas que hemos dado es la de los griegos. Sin embargo, hay una variante que aparece en un texto chino de la época Han (entre el siglo II A.E.C. y el siglo II E.C.) y que exponemos en el ejercicio siguiente, que puede hacerse siguiendo los mismos pasos de la última demostración.

EJERCICIO 8: Sea

$$\mathcal{Q} = \{(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ r > s \text{ y } r, s \text{ primos entre sí}\}.$$

(A) Demostrar que la aplicación

$$(r, s) \stackrel{g}{\mapsto} (a, b, c) \ni \ a = rs, \ b = \frac{r^2 - s^2}{2}, \ c = \frac{r^2 + s^2}{2}$$

es una BIYECCIÓN de $\mathcal{Q}$ sobre $\mathcal{T}$.

(B) ¿Como se puede pasar de la representación de los chinos a la de los griegos y recíprocamente?

EJERCICIO 9:

(A) Dado $n \in \mathbb{N}$, explicar si es o no es cierto que existe un triángulo rectángulo con lados de longitud entera, uno de cuyos catetos mide n.

(B) Dado un número impar $m \in \mathbb{N}$, explicar si es o no es cierto que existe un triángulo rectángulo con lados de longitud entera, cuya hipotenusa mide m.

EJERCICIO 10: Volviendo a la transcripción de Plimpton 322 y usando de nuevo la misma notación del ejercicio 7, ver que, para todas las filas menos para una, existen $u, v \in \mathbb{N}$, primos entre si, con factores primos $2, 3$ o 5, tales que $y = u^2 - v^2$ y $z = u^2 + v^2$. Determinar u y v y calcular x como $x = 2uv$.

El descubrimiento de la tablilla Plimpton 322 y la interpretación que publicaron Neugebauer y Sacks en 1945 despertaron algunos entusiasmos desmedidos. Según estos autores, las ternas se elaboraron a partir de las fórmulas de los griegos que hemos discutido más arriba. A partir de aquí, es frecuente encontrar en la literatura referencias a Plimpton 322 como “el primer escrito de teoría de números”y alabanzas parecidas. Otros autores han lanzado la teoría de que la tablilla en cuestión es, en realidad, una tabla trigonométrica. Como ha defendido Eleanor Robson en su artículo *“Words and Pictures: New Light on Plimpton 322”, The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 2 (Feb., 2002), pp. 105-120 publicado por: Mathematical Association of America,* la verdad puede ser algo más prosaica y hay que encontrarla poniendo el estudio de esta tablilla en el contexto de otras encontradas en el sitio de Larsa con contenido matemático o simplemente administrativo, comercial o escolar.

Para esta autora, las ternas se generaron a partir de pares recíprocos. En concreto, si se usa un $s > 0$ para generar una terna "reducida"

$$y' = (s - 1/s)/2, \; x' = 1, \; z' = (s + 1/s)/2$$

y luego se reescala multiplicando o dividiendo los tres números por 2,3,5 hasta obtener números enteros primos entre sí, resultan ternas pitagóricas primitivas. En efecto, las fórmulas de los griegos del ejercicio 10 se obtienen con $s = u/v$ multiplicando todo por $2uv$. Y ¿de donde provienen los pares recíprocos? Según Robson, de un ejercicio escolar común que se puede calificar como "álgebra de cortar y pegar". Se busca un par de recíprocos s y $1/s$ cuya diferencia sea igual a un número dado $s - 1/s = d$. Esto es, en realidad, resolver una ecuación cuadrática y en muchas tablillas escolares de Larsa del mismo periodo, se da una solución geométrica que consiste en dibujar un rectángulo cuyos lados son s y $1/s$ Si se lleva el lado pequeño $1/s$ sobre el mayor s sobra una longitud d. Si esta se divide en 2 y se lleva el rectángulo derecho debajo del cuadrado de lado $1/s$, resulta una zona en forma de L cuya área es 1. A partir de aquí se obtiene

$$\left\{\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right\}^2+1=\left\{\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right\}^2.$$