CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 4

PARA ENTREGAR ANTES DEL 15 DE NOVIEMBRE DE 2007

1) Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado, $B \subset A$ un subconjunto. Para cada una de las afirmaciones siguientes demostrar que es cierta o dar un contraejemplo: i) Si A tiene un máximo, entonces A tiene un único elemento maximal; ii) Si A tiene un único elemento maximal, entonces A tiene un máximo; iii) Si B tiene un ínfimo en A, entonces B tiene un único elemento minimal y iv) Si B tiene un único elemento minimal, entonces B tiene un ínfimo en A.

2) Dada la relación de orden en $\mathbb{N}$, $n\mathcal{R}m \iff n$ *divide a* m, hallar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos (si existen) del conjunto $A = \{2, 3, 5, 6, 15, 10, 30\}$. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en A?.

3) Sea X un conjunto no vacío, $(\mathbb{N}, \leq)$ el conjunto ordenado de los números naturales y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación. Se define en X la siguente relación: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Demostrar que:

a) La relación $\mathcal{R}$ no es en general una relación de orden.

b) La relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es una aplicación inyectiva.

4) Diremos que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A (que supondremos $\neq \emptyset$) es una *relación estricta* si satisface las dos propiedades siguientes:

i) No existen $x, y \in A$ tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ (se podría llamar a esta propiedad "antisimétrica estricta").

ii) Si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, entonces xRz (propiedad transitiva).

a) Demostrar que una relación de orden no es una relación estricta, y que una relación estricta no es una relación de orden.

b) A pesar de la anterior, demostrar que dar una relación estricta en un conjunto A es equivalente a dar una relación de orden en A. (Sugerencia: ¿qué hay que añadir a una relación estricta para convertirla en una relación de orden?)

5) Sea $X = \{A \in P(\mathbb{Z}) : A \text{ es finito}\}$. Dado A finito, $Card(A)$, el *cardinal* de A, es el número de elementos de A.

a) Definimos en X la relación $A\mathcal{R}B \iff Card(A) \leq Card(B)$. Demostrar que $\mathcal{R}$ NO es una relación de orden.

b) Definimos ahora en X la relación $A\mathcal{R}'B \iff Card(A) < Card(B)$. Demostrar que $\mathcal{R}'$ es una relación estricta.

c) Describe la relación de orden definida por $\mathcal{R}'$ de acuerdo con el procedimiento del apartado b) del problema anterior.

6) En $(\mathbb{R};\leq)$ hallar el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de los conjuntos siguientes:

a) $]0,1[$ b) $[0,1[$ c) $]0,1]$ d) $[0,1]$ e) $\{2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ f) $\mathbb{Q}\cap[-\pi,\pi[$

7) En el conjunto de funciones $C=\{f \mid f:[0,1]\to[0,1]\}$ definimos la relación $f\mathcal{R}g \iff \sup(f)\leq\sup(g)$. Estudiar si es una relación de orden de algún tipo (parcial, total).

8) Dados $\alpha=(a,b,c)$ y $\alpha'=(a',b',c')$ en $\mathbb{N}^3$, se define:

$$\alpha\leq\alpha' \iff (a<a')\vee(a=a' \quad\wedge\quad b<b')\vee(a=a' \quad\wedge\quad b=b' \quad\wedge\quad c\leq c').$$

Discutir qué tipo de relación de orden es. Esta relación de orden se llama *orden lexicográfico*, por el modo en que ordenamos las palabras en el diccionario. Explicar por qué merece este nombre.

9) a) Generalizar la relación del ejercicio anterior para, dado k, ordenar k-uplas $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ de enteros positivos.

b) Generalizar el apartado anterior definiendo un *orden lexicográfico* en $A^k:=\{(a_1,\ldots,a_k):a_i\in A\}$, donde $(A,\leq)$ es un conjunto ordenado cualquiera.

10) Sea $C=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Dar una descripción explícita del conjunto C y ordenar sus elementos con el orden lexicográfico en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Hallar sus elementos maximales y minimales. ¿Son máximo y mínimo? ¿Puede ser el conjunto C el grafo de alguna función de un subconjunto de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$?.

11) En $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con el orden lexicográfico consideramos los subconjuntos siguientes: $A:=[0,1]\times[0,1]$, $B:=(0,1)\times(0,1)$, $C:=[0,1]\times(0,1)$, $D:=(0,1)\times[0,1]$. Para cada uno de ellos encontar sus máximos y mínimos, elementos maximales y minimales, cotas, supremos e ínfimos (si existen).

12) Considérese el conjunto, S, de todas las sucesiones infinitas $\{a_1,a_2,\ldots\}$ de números reales. Se dice que dos de esas sucesiones, $\alpha=\{a_1,a_2,\ldots\}$ y $\alpha'=\{a_1',a_2',\ldots\}$, satisfacen $\alpha\leq\alpha'$ si los términos de α llegan a ser en algún momento menores o iguales que los de α'. Es decir, si existe $K>0$ tal que $a_j\leq a_j'$ para todo $j\geq K$. Decidir qué tipo de relación es, y en particular si es o no de orden.

13) Diremos que un conjunto ordenado $(A,\leq)$ está *bien ordenado* si cualquier subconjunto no vacío $X\subset A$ tiene un mínimo.

a) Estudiar si los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ con sus ordenes naturales y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con el orden lexicográfico están bien ordenados.

b) ¿Es cierto que si $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces cualquier subconjunto no vacío $X\subset A$ tiene un máximo?

14) Definimos en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ una relación $\mathcal{R}$: $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff (a+b<c+d) \vee (a+b=c+d \wedge a\leq c)$.

a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de orden y además es un buen orden en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

b) Halla los conjuntos de cotas superiores e inferiores, el supremo y el ínfimo, el máximo y el mínimo (todo en caso de que existan) para este orden del conjunto $A := \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid a^2+b^2 \leq 16\}$.

15) Sean A, B unos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que:

a) el orden natural $\leq$ en $\mathbb{R}$ define un buen orden tanto en A como en B;

b) $a<b$ para cualquier par de elementos $a\in A$, $b\in B$.

Demostrar que la relación $\leq$ define un buen orden en $A\cup B$.

16) Sea L un subconjunto de $\mathbb{R}$ que está bien ordenado respecto del orden $\leq$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que L es numerable. (*Recuerda:* Decimos que un conjunto es *numerable* cuando su cardinal es finito o cuando se puede poner en correspondencia biyectiva con los naturales).

17) Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones reales estrictamente crecientes. Demostrar que el conjunto $\{a_n+b_m : n,m\in\mathbb{N}\}$ está bien ordenado (respecto del orden natural $\leq$ en $\mathbb{R}$).

18) Sea $A=\{a,b,c\}$. Define una relación de orden <u>total</u> $\mathcal{R}$ en $P(A)$ tal que $\forall X,Y\in P(A), X\subset Y \Longrightarrow X\mathcal{R}Y$.

19) Vamos a generalizar el ejercicio anterior. Sea $\mathcal{S}$ una relación de orden en un conjunto A. Demuestra que existe una relación de orden <u>total</u> $\mathcal{R}$ que extiende $\mathcal{S}$, lo que quiere decir que $a\mathcal{S}b \Longrightarrow a\mathcal{R}b$, o equivalentemente, que viendo $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ como subconjuntos de $A\times A$ tenemos $\mathcal{S}\subset\mathcal{R}$. Para ello vemos el conjunto de las relaciones de orden, al que llamaremos $\mathcal{O}$, como un subconjunto de $P(A\times A)$, y lo ordenamos mediante $\subset$.

a) Demuestra que toda relación de orden total es un elemento maximal de $\mathcal{O}$.

b) Recíprocamente, demuestra que todo elemento maximal de $\mathcal{O}$ es un orden total. *(SUGERENCIA: intenta extender un orden como en el ejercicio 15. Ten de nuevo cuidado con la propiedad transitiva.)*

c) Demuestra que cualquier orden $\mathcal{S}$ en A se puede extender a un orden total. *(SUGERENCIA: Aplica el Lema de Zorn al subconjunto de $\mathcal{O}$ formado por los órdenes que extienden $\mathcal{S}$.)*

20) Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $(X;R)$, $(Y;S)$ son equivalentes y R es un orden total, entonces S es también total.

b) Demostrar que si $(X;R)$ está bien ordenado, entonces cualquier otro conjunto ordenado $(Y;S)$ que sea del mismo tipo que $(X;R)$ estará también bien ordenado.

c) Demostrar que todo conjunto numerable admite un buen orden.