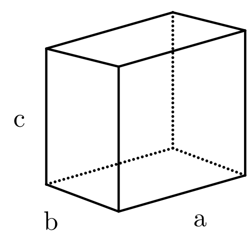
CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 3

PARA ENTREGAR ANTES DEL 5 DE NOVIEMBRE DE 2007

1) Consideremos la fórmula

$$V = a \cdot b \cdot c$$

que a cada terna de números reales positivos (a, b, c) le hace corresponder su producto V. Si a, b, c son, respectivamente, el largo, ancho y alto de un prisma recto rectangular, entonces V es el volumen



¿Es inyectiva?, ¿es sobreyectiva? (El conjunto de llegada se considera igual a los reales positivos).

2) ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles suprayectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Empieza por asegurarte de que todas ellas son, efectivamente, funciones).

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(m) = m + 2;$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(m) = 2m - 7;$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - x^3;$

d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 + 4x;$

e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n(n+1);$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1};$

g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2 + n + 1;$

h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(t) = t/(t+1).$

3) Da ejemplos de aplicaciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de cada uno de los siguientes tipos:

a) Inyectivas pero no suprayectivas;

b) Suprayectivas pero no inyectivas;

c) Biyectivas;

d) Ni inyectivas ni suprayectivas.

4) Sean $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ las aplicaciones definidas por $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 2$. Estudia la posible suprayectividad o inyectividad de $f,\ g,\ f \circ g,\ g \circ f$.

5) Se considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(\alpha, \beta) = 3\alpha + 2\beta$. Averigua si f es inyectiva y/o suprayectiva.

6) Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Recuerda que si $Z \subset Y$, se define $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$. Define una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\{3\}) = \mathbb{R}$. Describe $f^{-1}(\{\pi\})$ y $f^{-1}([e, \pi])$ para la función f que hayas definido.

7) Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos. Definimos la aplicación $a : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ como $a(t) =$ *la medida en grados del menor de los ángulos de* t. Encuentra $a^{-1}(\{60\})$ y $a(\{\text{triángulos rectángulos}\})$.

8)
a) Demuestra que $f : X \to Y$ es inyectiva $\iff$ existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$.

b) Demuestra que $f : X \to Y$ es sobreyectiva $\iff$ existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$.

c) Demuestra que $f : X \to Y$ es biyectiva $\iff$ existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$.

d) Indica dónde es necesario utilizar el Axioma de elección.

9) Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos para cada subconjunto $A \subset Y$ la imagen inversa:

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demuestra que

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$;

b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$;

c) $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z$;

d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$.

10) Sea $f : X \to Y$ una función y sean A, B dos subconjuntos de X.

Demuestra que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

¿Es cierto que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? ¿Es cierto que $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$?

11) Demuestra que la función $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$b(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

es efectivamente una función y es biyectiva. Describe la función b^{-1}.

12) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

y sea $A = [-2, 1] \subset \mathbb{R}$.

a) Dibuja el gráfico de f y calcula $f(A)$.

b) Demuestra que f no es ni inyectiva ni suprayectiva, pero que si la restringimos a $f : A \to f(A)$ la función restringida *es* una biyección. Encuentra la función inversa de esta biyección.

13) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x<-1\\ -x & \text{si } -1\le x<1\\ x^2 & \text{si } x\ge 1.\end{cases}$$

a) Dibuja el gráfico de g.

b) Demuestra que g no es ni inyectiva ni suprayectiva, pero que basta con cambiar la definición de $g(x)$ para un único valor de x para obtener una función biyectiva. (La manera de hacer esto no es única).

c) Describe explícitamente la función inversa de la que has obtenido en el apartado b).

14) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1\\ 1-x^2 & \text{si } x>1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0\\ (x-1)^2 & \text{si } x\ge 0.\end{cases}$$

a) Dibuja los gráficos de las funciones $f,\ g,\ g\circ f$ y $f\circ g$.

b) Encuentra las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decide si son inyectivas y/o suprayectivas.

15) Probar que $y=\frac{x}{1-|x|}$ es una biyección entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$.

16) Sea E un conjunto distinto del vacío. Para cada subconjunto $A\subset E$ definimos una función $\chi_A:E\to\{0,1\}$, llamada *función característica de A (en E)*, como: $\chi_A(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in A\\ 0, & \text{si } x\notin A.\end{cases}$

Demuestra:

a) $\chi_A=\chi_B \Longleftrightarrow A=B$

b) $\chi_E(x)=1,\ \forall x\in E$ y $\chi(x)=0,\ \forall x\in E$

c) $\chi_{E\setminus A}(x)=1-\chi_A(x),\ \forall x\in E$

d) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x),\ \forall x\in E$

e) $\chi_{A\cup B}(x)+\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x),\ \forall x\in E.$

17) Sean A_1,A_2 dos conjuntos. Definimos funciones $\pi_1:A_1\times A_2\to A_1$ y $\pi_2:A_1\times A_2\to A_2$, llamadas respectivamente *primera y segunda proyección*, como $\pi_1(x_1,x_2)=x_1,\pi_2(x_1,x_2)=x_2$.

Sea X un conjunto cualquiera y sean $f_1:X\to A_1, f_2:X\to A_2$. Demuestra que existe una única función $f:X\to A_1\times A_2$ tal que $\pi_1\circ f=f_1$ y $\pi_2\circ f=f_2$.

18) Con la misma notación del ejercicio anterior, demuestra que:

a) Si $B\subset A_1$, entonces $\pi_1(\pi_1^{-1}(B))=B$.

b) Si $B\subset A_1\times A_2$, entonces $B\subset\pi_1^{-1}(\pi_1(B))$. ¿Es cierto en general el contenido recíproco?

19) De nuevo con la misma notación, supón que A_1 y A_2 son no vacíos. Define funciones inyectivas $\alpha_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ y $\alpha_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ tales que $\pi_1 \circ \alpha_1 = id_{A_1}$ y $\pi_2 \circ \alpha_2 = id_{A_2}$.

20) Comprobar que las siguientes son relaciones de orden:

a) El orden "$\leq$" en los naturales $\mathbb{N}$; en los enteros $\mathbb{Z}$; en los racionales $\mathbb{Q}$; y en los reales $\mathbb{R}$.

b) La inclusión "$\subseteq$" en $\mathcal{P}(X)$ (partes de X).

c) La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$.

d) En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación R dada por:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \text{si y solo si} \quad (a \leq c) \wedge (b \leq d)\,.$$

e) El orden lexicográfico, o alfabético, en el conjunto de las palabras de un idioma.

f) En el conjunto de las funciones $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$.

21) Dado un conjunto ordenado, $(X; R)$, sea $xR^{-1}y$ si y solo si yRx. Demostrar que $(X; R^{-1})$ es también un conjunto ordenado (con el orden inverso R^{-1}).

22) ¿Son equivalentes como conjuntos ordenados $(N, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$?