1. Sean X_k v.a. independientes, B_k borelianos de $\mathbb{R}$.

(a) Probar que las variables *truncadas* $X_k\,\mathbf{1}_{\{X_k\in B_k\}}$ son independientes.

R: Llamemos $Y_k = X_k\,\mathbf{1}_{\{X_k\in B_k\}}$ $\forall k\in\mathbb{N}$. *Si* $C_k\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\forall k\in\mathbb{N}$, *tenemos que* $Y_k\in C_k \Leftrightarrow X_k\in C'_k$, *donde*

$$C'_k = \begin{cases} B_k\cap C_k \textit{ si } 0\notin C_k \\ (B_k\cap C_k)\cup \complement B_k \textit{ si } 0\in C_k. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{Y_{k_j}\in C_{k_j}\}\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{k_j}\in C'_{k_j}\}\right) = \prod_{j=1}^{n}\mathsf{P}\{X_{k_j}\in C'_{k_j}\} = \prod_{j=1}^{n}\mathsf{P}\{Y_{k_j}\in C_{k_j}\}$$

De otra forma: X_k *son independientes si y sólo si lo son las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(X_k)$. *Pero en ese caso también lo son las* $\mathcal{F}(X_k\,\mathbf{1}_{\{X_k\in B_k\}})\subset\mathcal{F}(X_k)$, *para cualesquiera* $B_k\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(b) ¿Serán independientes los sucesos $A_k = \{X_k - X_{k-1}\in B_k\}$?
Probarlo o dar un contraejemplo.

R: No son independientes como demuestra el siguiente contraejemplo. Supongamos que cada X_k *toma los valores* 0 *y* 1 *con probabilidad* $1/2$ *cada uno y sea* $B_k =]0,1]$ $\forall k\in\mathbb{N}$. *Entonces*

$$\forall k\geq 2,\ \mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}\{X_k - X_{k-1} = 1\} = \mathsf{P}\{X_k = 1\wedge X_{k-1} = 0\} = 1/4,$$

mientras que $\mathsf{P}(A_k\cap A_{k+1}) = 0$.

(c) Si además sabemos que los A_k del apartado anterior cumplen $\sum_k \mathsf{P}(A_k) = \infty$, ¿se deduce que $\mathsf{P}(\limsup A_k) = 1$? *Sugerencia: pensar en los* A_k *con* k *par.*

R: Los sucesos $A_{2j},\ j\in\mathbb{N}$ *son independientes, ya que cada uno depende de un conjunto diferente de las variables* X_k. *Lo mismo puede decirse de los sucesos* $A_{2j+1},\ j\in\mathbb{N}$. *Si se tiene* $\sum_k \mathsf{P}(A_k) = \infty$, *o bien será* $\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathsf{P}(A_{2j}) = \infty$ *o bien será* $\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathsf{P}(A_{2j+1}) = \infty$. *Así, aplicando el lema de Borel-Cantelli, obtenemos que, o bien* $\mathsf{P}(\limsup_{j\in\mathbb{N}} A_{2j}) = 1$, *o bien* $\mathsf{P}(\limsup_{j\in\mathbb{N}} A_{2j+1}) = 1$. *Pero el límite superior de una sucesión de conjuntos está formado por los puntos que pertenecen a infinitos de dichos conjuntos, de modo que los límites superiores mencionados son subconjuntos de* $\limsup_{j\in\mathbb{N}, j\geq 2} A_j$, *que será, también, un suceso de probabilidad* 1.

2. Sea $S = Z^2$ para una Z Normal(0,1).

(a) Hallar la función generatriz de momentos $M_S(t) = \mathsf{E}[e^{tS}]$ (para los valores de t que hagan finita esa esperanza).

R: Integrando contra la densidad de Z,

$$\mathsf{E}[e^{tS}] = \int e^{tz^2} f_Z(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} e^{(2t-1)z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \qquad \text{(con } w = z\sqrt{1-2t}\text{, para } 2t < 1\text{)}$$

$$= 1/\sqrt{1-2t}\ , \qquad \text{ya que } \int_{\mathbb{R}} f_Z(w)\,dw = 1.$$

Es inmediato que la integral no converge si $2t \geq 1$.

(b) Deducir cuál será la función generatriz de momentos de $S_d = |Z|^2$ si $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$ tiene coordenadas Normales(0,1) e independientes .

R: S_d es suma de d v.a.i. como la S de (a), luego $\mathsf{E}[e^{tS_d}] = M_S(t)^d$.

(c) Explicar por qué S_d/d tiende en probabilidad a una constante cuando $d \to \infty$ y hallar esa constante.

R: Como los sumandos de S_d tienen $\mathsf{E} = 1$, la LGN dice que $S_d/d \ \to 1$.

---

3. (a) Explicar qué distribución tiene $X = -\log U$ si $U \sim$ Unif(0,1).

R: Los valores de X son > 0 y la función de distribución será

$$F(x) = \mathsf{P}\{X \leq x\} = \mathsf{P}\{\log U \geq -x\} = \mathsf{P}\{U \geq e^{-x}\} = \int_{e^{-x}}^{1} dy = 1 - e^{-x},\ x > 0.$$

Por tanto, la función de densidad será $f(x) = F'(x) = e^{-x},\ x > 0$.

(b) Sobre un intervalo I de longitud inicial L se realiza este proceso:
se elige al azar un punto x del intervalo y se suprime la parte que queda a su derecha; lo que queda es el intervalo I_1, sobre el que se vuelve a realizar la misma operación y así sucesivamente.
Si llamamos L_n a la longitud de I_n ,¿qué distribución tiene L_n/L_{n-1}?

R: $L_n/L_{n-1} \sim$ Unif(0,1).

(c) Usando los dos apartados anteriores y el Teorema Central del Límite, explicar qué distribución aproximada tendrá la variable $\log L_n$ para n grande.

R: Podemos escribir

$$L_n = \frac{L_n}{L_{n-1}} \frac{L_{n-1}}{L_{n-2}} \cdots \frac{L_2}{L_1} L_1$$

que implica, tomando logaritmos

$$\log L_n = \log \frac{L_n}{L_{n-1}} + \log \frac{L_{n-1}}{L_{n-2}} + \cdots + \log \frac{L_2}{L_1} + \log L_1.$$

Vemos que $\log L_n$ es suma de n copias independientes de $\log U$. Aplicando el Teorema Central del límite, tenemos que, si llamamos $E[\log U] = \mu$ y $\mathrm{Var}[\log U] = \sigma^2$,

(1) $$\frac{\log L_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{para } n \to \infty.$$

Pero, por lo que vimos en el primer apartado, la función de densidad de $\log U$ es $e^x,\ x < 0$, que, inmediatamente nos da $\mu = -1$ y $\sigma = 1$. Podemos decir que, para n grande, la distribución de $\log L_n$ es, aproximadamente $N(-n, \sqrt{n})$.

---

4. Las bombillas que coloco en un cierto punto de luz duran X (*horas*), con media μ; cuando una falla, se reemplaza de inmediato.
Sea X_i la duración de la i-ésima bombilla colocada, y sea $N_t =$ *no. de bombillas colocadas hasta el instante* t (*horas*) (la primera se colocó en el instante $t = 0$).

(a) Expresar en términos de las X_i el suceso $N_t \le n$, y probar que $N_t \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

R: $N_t \le n$ afirma que en el instante t aún no falló la n-ésima bombilla:

$$t < S_n = \sum_{i=1}^n X_i \ ,$$

y como N_t es un entero creciente con t,

$$\Omega \setminus \{N_t \to \infty\} = \cup_n \{S_n = \infty\} \ ,$$

que tiene $\mathsf{P} = 0$ porque la tiene cada $\{S_n = \infty\}$.

(b) Probar que $N_t/t \to 1/\mu$ casi seguramente cuando $t \to \infty$.
Sugerencia: si $N_t = n$, acotar N_t/t entre dos expresiones que no dependen de t.

R: Si $N_t = n$, se tiene $S_n - 1 \le t < S_n$, luego

$$\frac{n}{S_n} < \frac{N_t}{t} \le \frac{n}{S_n} = \frac{n}{n-1} \ \frac{n-1}{S_{n-1}}$$

y por la Ley Fuerte, $S_n/n \to \mu$ c.s.; como $n = N_t \to \infty$ cuando $t \to \infty$, las dos expresiones que acotan a N_t/t tienden c.s. a $1/\mu$.

% Comentario: como hablamos de "vida de una bombilla" *y no de v.a. abstractas, es obvio suponer, no solamente que $\mathsf{P}(X_i = \infty) = 0$ como se ha hecho en (a), sino que tienen varianza finita o hasta valores acotados.*

(c) Decir, justificando la respuesta, cómo ha de ser a para que se tenga $\mathsf{P}(N_t \le at) \to 1$ cuando $t \to \infty$.

R: Se cumple para $a > 1/\mu$, como consecuencia inmediata de que $N_t/t \to 1/\mu$ en P. Y falla para $a < 1/\mu$ por la misma razón.

% Esta era la respuesta esperada. Para ver qué ocurre si $a = 1/\mu$ hay que "usar el microscopio": recurrir a las cotas de (b)

$$\{N_t/t \le 1/\mu\} \begin{cases} \subset \{S_n > n\mu\} = & \{S_n - n\mu > 0\} \\ \supset \{S_{n-1} \ge n\mu\} = & \left\{ \dfrac{S_{n-1} - (n-1)\mu}{\sqrt{n-1}} \ge \dfrac{\mu}{\sqrt{n-1}} \right\} \end{cases}$$

y al TCL, que nos dice que los dos sucesos de la derecha tienen $\mathsf{P} \to 1/2$ cuando $n \to \infty$.
