CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 5

PARA ENTREGAR ANTES DEL 26 DE NOVIEMBRE DE 2007

1) Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en un conjunto X. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}$ satisface las dos propiedades siguientes:
i) Para todo $x \in X$ existe un $a \in X$ tal que $a\mathcal{R}x$.
ii) $a\mathcal{R}b$ y $a\mathcal{R}c \Longrightarrow b\mathcal{R}c$.

2) Considerar la relación sobre $\mathbb{Z}$ definida por: $(m, n) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow m + n$ es par. Demostrar que es una relación de equivalencia. Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

3) Considerar la relación sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por: $(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Longleftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente?.

4) Consideramos ahora la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Longleftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$. ¿Es esta relación una relación de equivalencia?

5) Considerar la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $(m, n)\mathcal{R}(m', n') \Longleftrightarrow m + n' = m' + n$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes decribir las clases de equivalencia? ¿Puedes identificar cada clase de equivalencia con los elementos de algún conjunto de forma que te ayude a describir el conjunto cociente?

6) Definimos en $\mathbb{Q}$ la siguiente relación: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases del 0 y de 1/2, el conjunto cociente y decidir si 2/3 y 1/3 pertenecen a la misma clase.

7) Definimos en $\mathbb{Q}$ la siguiente relación: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow$ existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \frac{3y+h}{3}$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir el conjunto cociente y decidir si 2/3 y 4/5 pertenecen a la misma clase.

8) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow y = y'$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes identificar cada clase de equivalencia con los elementos de algún conjunto de forma que te ayude a describir el conjunto cociente?

9) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si $y - y'$ es un entero y $x - x'$ es un entero. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes identificar cada clase de equivalencia con los elementos de algún conjunto de forma que te ayude a describir el conjunto cociente?

10) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow d((x, y), (x', y')) < 1$, donde d indica la distancia usual entre dos puntos del plano. Estudiar si es una relación de equivalencia y en caso afirmativo describir las clases de equivalencia.

11) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow xy = x'y'$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

12) Considerar la relación definida, sobre la colección de todos los círculos en el plano $\mathbb{R}^2$, por $C_1\mathcal{R}C_2 \Longleftrightarrow$ el círculo C_1 y el círculo C_2 tienen el mismo centro. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes identificar cada clase de equivalencia con los elementos de algún conjunto de forma que te ayude a describir el conjunto cociente?

13) Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación: $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow$existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $|x| < r$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

14) Sea A un conjunto y B un subconjunto de A. En $P(A)$ se considera la siguiente relación: Dados $X, Y \in P(A)$, $X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow X \cap B = Y \cap B$. Estudia si es una relación de equivalencia, en caso afirmativo describe el conjunto cociente.

15) Sea S el conjunto de todos los seres humanos. Sean $x, y \in S$. Decimos que x está relacionado con y si x e y son hermanos (o sea, tienen la misma madre y el mismo padre). Probar que es una relación de equivalencia. ¿Qué son las clases de equivalencia?.

16) Sea S el conjunto de todos los seres humanos. Sean $x, y \in S$. Decimos que x está relacionado con y si x e y tienen al menos un progenitor en común. ¿Es una relación de equivalencia?. Justificar la respuesta.

17) Designamos por $[(m, n)]$ la clase de un elemento $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ en la relación de equivalencia del ejercicio 3. Llamamos X al conjunto cociente de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ por esta relación. Definimos una operación $*$ en X mediante la fórmula:

$$[(m, n)] * [(m', n')] = [(m \cdot n' + m' \cdot n, n \cdot n')].$$

Demostrar que esta operación está bien definida, esto es, la definición <u>no</u> depende de los representantes de las clases. ¿Puedes identificar esta operación en términos de cosas que conocieses previamente?

18) El conjunto cociente de $\mathbb{Z}$ por la relación de equivalencia del ejercicio 2 se suele denotar $\mathbb{Z}/2$ (se lee "$\mathbb{Z}$ módulo 2"). Sea $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ la aplicación canónica de paso al cociente que a cada $n \in \mathbb{Z}$ le hace corresponder su clase.

Sean $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dos aplicaciones definidas respectivamente por $f(n) = 3n$ y $g(n) = (-1)^n + 3$. Dar un ejemplo, o demostrar la no existencia, de las aplicaciones siguientes:

$$\begin{array}{lllcl}
a) & F_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ f & = & F_1. \\
b) & F_2 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} & \text{tal que} & F_2 \circ \pi & = & f. \\
c) & F_3 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ f & = & F_3 \circ \pi. \\
d) & G_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ g & = & G_1. \\
e) & G_2 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} & \text{tal que} & G_2 \circ \pi & = & g. \\
f) & G_3 : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 & \text{tal que} & \pi \circ g & = & G_3 \circ \pi.
\end{array}$$

19) Sean X, Y dos conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.
Definimos en X la relación $\mathcal{R}_f$ mediante: $x_1 \mathcal{R}_f x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
a) Comprobar que $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia.
b) ¿Quién es $\mathcal{R}_f$ si f es inyectiva?
c) Llamemos X/f al conjunto cociente de X por $\mathcal{R}_f$. Dar explícitamente una biyección entre X/f y la imagen de f, $Im(f)$.
d) Sea $\pi : X \to X/f$ la aplicación canónica de paso al cociente que a cada $x \in X$ le hace corresponder su clase. Demostrar que existe una única aplicacion $\overline{f} : X/f \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Demostrar además que $\overline{f}$ es inyectiva.

20) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C. Demostrar que los tres conjuntos son equipotentes.

21) Sean A y B dos conjuntos equipotentes (o sea, con el mismo cardinal). Sean A' y B' dos conjuntos también equipotentes. Demostrar los siguiente:
a) $A \times A'$ es equipotente a $B \times B'$.
b) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es equipotente a $A \times \{0, 1\}$
c) Si $A \cap A' = \emptyset$ y $B \cap B' = \emptyset$ entonces $A \cup A'$ y $B \cup B'$ son equipotentes.

22) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

23) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \ldots, a_n \in A$ son elementos de A, el conjunto $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ es equipotente a A. (Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

24) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Demostrar que los cuatro conjuntos

$$A_{a,b} := (a, b), \qquad B_{a,b} := [a, b), \qquad C_{a,b} := (a, b], \qquad D_{a,b} := [a, b]$$

son equipotentes. Demostrar que $A_{a,b}$ es equipotente a $A_{0,1}$ para cualesquiera valores de a, b, y concluir que <u>todos</u> los conjuntos de las formas $A_{a,b}, B_{a,b}, C_{a,b}, D_{a,b}$ para cualesquiera valores de a, b son equipotentes.

25) ¿Cuál es el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, d) $P(\mathbb{Q})$, e) $\mathbb{C}$, f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$,
g) El conjunto de <u>todas</u> las raíces (racionales o no) de todos los polinomios cuadráticos con coeficientes racionales.
h) El conjunto de <u>todas</u> las raíces (reales o no) de todos los polinomios cuadráticos con coeficientes reales.
i) El conjunto de <u>todas</u> las raíces (racionales o no) de <u>todos</u> los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama "conjunto de los números algebraicos").
j) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos.
k) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen al menos 3 y no más de 8 elementos, esto es,
$\{A \in P(\mathbb{N}) \mid 3 \leq Card(A) \leq 8\}$.
l) $\{A \in P(\mathbb{N}) \mid Card(A) \geq 6\}$.

26) Definimos la siguiente relación en $\mathbb{R}$: $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Puede ser numerable el conjunto cociente?