CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 6

PARA ENTREGAR ANTES DEL 20 DE DICIEMBRE DE 2007

1. Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Decir si son anillos o cuerpos (respecto de las operaciones en $\mathbb{R}$) en cada uno de estos casos. Justificar todas las respuestas.

   a) $\{\frac{n}{2^m} : m, n \in \mathbb{Z}\}$;
   b) $\{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\}$;
   c) $\{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0\}$;
   d) $\{r + \sqrt{s} : r, s \in \mathbb{Q}, s > 0\}$;
   e) $\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{0\}$;
   f) $\{m + n\sqrt{5} : m, n \in \mathbb{Z}\}$;
   g) $\{m + n\sqrt{2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Q}\}$;
   h)* $\{r + s\sqrt[3]{3} : r, s \in \mathbb{Q}\}$;
   i) $\{x + y^2 : x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$;
   j) $\{2m + \sqrt{3}\,k : m, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. *a*) Sean K y L dos anillos. Demostrar que $K \times L$ es también un anillo, si le dotamos de las operaciones de la suma y del producto según las reglas:
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd), \qquad a, c \in K,\ b, d \in L.$$
   b) Supongamos que K y L son cuerpos. ¿Va a ser $K \times L$, con operaciones así definidas, necesariamente un cuerpo? Dar una demostración o un contraejemplo.

3. Sean f, g dos funciones definidas en $[0, +\infty)$ tales que f es creciente, g es decreciente, y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$. Demostrar que existe un número real α tal que $f(x) \leq \alpha \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

4. *a*) Demostrar el siguiente *lema de intervalos encajados:* Sea $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subintervalos finitos cerrados de $\mathbb{R}$ tal que $J_n \supset J_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces la intersección de estos intervalos no es vaciía.
   b) Demostrar que, bajo las hipótesis de este lema, las longitudes de los intervalos J_n tienen un límite.
   c) Dar la condición necesaria y suficiente para que el conjunto $\cap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ tenga exactamente un punto.

5. Sea K un cuerpo tal que $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, $K \neq \mathbb{R}$ (las operaciones en K son heredadas de $\mathbb{R}$).
   a) Demostrar que existe un número infinito de cuerpos de este tipo.
   b) Demostrar que existe un conjunto no vacío A, $A \subset K$, acotado superiormente, que no tiene supremo en K.

6. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x > 0$, existe un único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$.

7. *(Continuación)* Dados $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $y^n = x$, definimos $x^{\frac{1}{n}}$ como la única solución positiva de la ecuación $y^n = x$. Sean $a, b > 0$ y $m, n, k \in \mathbb{N}$. Demostrar las siguientes propiedades de la raíces:

   a) $a > 1 \iff a^{\frac{1}{n}} > 1$; *b*) $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$; *c*) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$; *d*) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{kn}}\right)^{km}$.

8. *a*) Utilizar el apartado d) del ejercicio anterior para definir potencias racionales de un número a real positivo. Demostrar que $(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r > 0) \wedge (a > 1) \implies a^r > 1$; $(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r > 0) \wedge (a < 1) \implies a^r < 1$.
   b) *(La definición de potencias reales)* Sea $a > 0$ un número real fijo. Se considera la función $f_0 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f_0(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una función continua en $\mathbb{Q}$. Demostrar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_0 = f\big|_{\mathbb{Q}}$. Definimos $a^y = f(y)$, $\quad y \in \mathbb{R}$.
   Indicación: Demostrar que para todo $y \in \mathbb{R}$, existe el límite $\lim\limits_{r\in\mathbb{Q},\ r\to y} f_0(r)$ y que $f(y)$ tiene que ser igual a este límite.
   c) Partiendo de la definición de a^y, $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$, dada en el apartado b), demostrar las siguientes propiedades para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$:

   i) $a^b a^c = a^{b+c}$, ii) $(a^b)^c = a^{bc}$.

   Indicación: Comprobar primero estas propiedades para b, c racionales.

9. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+bi$:

$a)$ $\dfrac{1-i}{1+i}$; $c)$ $\dfrac{(2-i)^2}{(3-i)^2}$; $e)$ $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;

$b)$ $\dfrac{(3-i)(2+i)}{3+i}$; $d)$ $\left((2-3i)^3-i\right)^2$; $f)$ $\left((2+i)(2-i)\right)^2$.

10. Encontrar las partes reales e imaginarias de las siguientes expresiones, en función de $Re(z)$ e $Im(z)$:

a) z^2; b) $\dfrac{1}{z^2}$; c) $\dfrac{z+1}{z-1}$.

11. Verificar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$.

12. Calcular el módulo de los números complejos:

a) $i(2+3i)(5-2i)(-2-i)^{-1}$; b) $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$.

13. $a)$ Demostrar que para todos $\phi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)(\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\,\psi) = \cos(\phi+\psi) + i\,\mathrm{sen}(\phi+\psi).$$

$b)$ Deducir (usando inducción) *la fórmula de de Moivre*: $(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)^n = \cos(n\phi) + i\,\mathrm{sen}(n\phi)$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Hallar un polinomio con coeficientes reales que tenga a $z = 1+\sqrt{-2}$ entre sus raíces.

15. Encontrar dos números complejos tales que su cuadrado sea $8-6i$.

16. Demostrar las desigualdades: $\big|\,|z| - |w|\,\big| \le |z-w| \le |z| + |w|$.

17. Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos y expresarlos en forma polar:

a) $-2-2i$; b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$; d) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$.

18. Sea $r>0$ una constante. Demostrar que la ecuación de la circunferencia de radio r centrada en un punto ω es:

$$|z|^2 - 2Re(z\overline{\omega}) + |\omega|^2 = r^2.$$

19. Expresar en la forma $a+bi$: $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{\frac{\pi}{4}i}$, $e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

20. Demostrar la identidad: $1+z+z^2+\cdots+z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ cuando z es un número complejo, $z \neq 1$.

21. Demostrar que para todo n natural y para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene la desigualdad $|\,\mathrm{sen}(nx)| \le n\,|\,\mathrm{sen}(x)|$.
Indicación: aplicar las fórmulas de Euler y una variante de la fórmula del ejercicio anterior.

22. Sea w una raíz n-ésima de la unidad (es decir: $w^n=1$) distinta de 1. Comprobar que

$a)$ $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$;

$b)$ $1+2w+3w^2+\cdots+nw^{n-1}=\dfrac{n}{w-1}$.

23. $a)$ Demostrar que z es real si y sólo si $z=\overline{z}$.

$b)$ Sean a, b números complejos tales que $|b|=1$. Demostrar que $\left|\dfrac{a-b}{1-b\bar{a}}\right| = 1$.

24. Describir el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

a) $Im(z+5)=0$; b) $Re(z^2+5)=0$.

25. Calcular los diferentes valores de: $\sqrt{1-i}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[4]{16i}$ y $\sqrt{-9}$.

26. Calcular todas las raíces sextas de la unidad.

27. Para todo número z complejo, definimos $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\mathrm{sen}\, z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Demostrar las fórmulas:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w;$$

$$\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}\, z \cos w + \cos z\, \mathrm{sen}\, w.$$