CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 7

PARA ENTREGAR ANTES DEL 16 DE ENERO DE 2008

1. Hallar el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ que se obtienen al dividir el polinomio $P(X) = X^5 - X^3 + 3X - 5$ entre el polinomio $Q(X) = X^2 + 7$, primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{F}_5[X]$.

2. Calcular el máximo común divisor $D(x)$ de los polinomios $P(X) = X^5 - 5X^3 + 4X$ y $Q(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. Encontrar dos polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X) \cdot P(X) + B(X) \cdot Q(X) = D(X)$.

3. Sean P, $Q \in \mathbb{Q}[X]$. Demostrar que si P y Q son primos entre sí entonces también lo son $P + Q$ y $P \cdot Q$.

4. Determinar un polinomio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que $X^2 + 1$ divida a $P(X)$ y $X^3 + 1$ divida a $P(X) - 1$.

5. Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2 + 2X - 2) + B(X)(X^2 + X - 1) = 1$.

6. Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2 + 4X + 1) + B(X)(X^2 + 3X + 1) = 1$.

7. Determinar un polinomio $P(X)$ que cumpla las tres siguientes condiciones:

$$gr(P(X)) \leq 4, \qquad P(X+1) - P(X) = X \qquad \text{y} \qquad P(0) = 1.$$

8. Calcular todos los ceros racionales de $20X^3 - 56X^2 - 33X + 9$ y de $12X^5 - 17x^4 + 7X^3 - 5X^2 - 22X - 5$.

9. Determinar un polinomio $p(X)$ de grado tres tal que $p(0) = p(1) = p(2) = 1$

10. Sea $P(X) = X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 27X - 54$. Calcular en $\mathbb{Q}[X]$ el máximo común divisor de $P(X)$ y su derivada $P'(X)$ y encontrar todos los ceros de $P(X)$ con sus multiplicidades respectivas.

11. ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ para el que el polinomio $p(X) = X^5 - \frac{10a^2}{3}X^3 + 5a^4X - 8a^3$ tenga un cero de multiplicidad exactamente tres?

12. Demostrar que $2 + \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ son cada uno de ellos cero de un polinomio de $\mathbb{Z}[X]$. Determinar esos polinomios.

13. a) Demostrar que para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, existen infinitos polinomios irreducibles en $\mathbb{K}[X]$. (Sugerencia: Puede ser útil recordar la demostración de Euclides de que en $\mathbb{Z}$ hay infinitos primos.)

    b) Comprobar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo con un número finito de elementos (por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, para p primo) y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe algún polinomio irreducible en $\mathbb{K}[X]$, de grado mayor que n.

    c) Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existen infinitos polinomios de grado n que son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

14. a) Sea $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ y supongamos que existe un número primo p tal que $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$ y $p | a_j$ para $j = 0, 1, \cdots, t$. Probar que entonces $P(X)$ tiene un factor irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, de grado $\geq t + 1$. (Sugerencia: reducir módulo p.)

    b) Como aplicación del criterio anterior, demostrar que el polinomio $p + p^3X + pX^2 + X^3 + X^4$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ para cualquier primo p.

15. Sea $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Demostrar que $P(X)$ tiene un factor irreducible de grado 4 en $\mathbb{Q}[X]$. Descomponer $P(X)$ en polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

16. ¿Es reducible en $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio $p(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 3$? Justificar la respuesta.

17. Descomponer el polinomio $p(X) = X^4 + 3X^2 + 4$ en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{F}_p[X]$ para $p = 2, 3, 5$ y 7.

18. Determinar los polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}_2[X]$ de grados $1, 2, 3$ y 4.

19. Sea $P(X) = X^5 + 4X^4 + 4X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que $P(X)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

20. Obtener la descomposición en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$ del polinomio $P(X) = X^3 - X^2 - 2X + 2$. Hacer lo mismo en $\mathbb{K}[X]$ para los cuerpos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{F}_p$ para $p = 2, 3, 5$ y 7

21. Probar que el polinomio $1 + X + \cdots + X^{p-1}$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ para cualquier primo p.

22. Estudiar la reducibilidad sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios

$$1 + X + X^4 \qquad \text{y} \qquad 1 - X + X^4$$

23. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y consideremos el polinomio

$$P(X) = 1 + (n+1)X + 2(m+1)X^2 + nX^3 + X^4 \in \mathbb{Z}[X].$$

Probar que $P(X)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

24. Demostrar que existen infinitos enteros no representables como suma de tres cuadrados. (Sugerencia: Estudiar los cuadrados módulo 8).

25. Demostrar que si $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ entonces n es primo.

26. Escribir una sola congruencia que sea equivalente al par de congruencias $x \equiv 1 \pmod{4}$ y $x \equiv 2 \pmod{3}$.

27. Demostrar que si p es primo ($p \neq 3$) entonces $(p-2)2^{p-2} + 1$ no es primo.

28. Demostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible por 7.

29. Probar que $n^7 - n$ es divisible entre 42, para cualquier entero n.

30. Probar que $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ es un entero para todo n.

31. Oliana Molls trabaja cuatro días consecutivos y descansa uno. Betty trabaja dos y descansa uno. Sólo se ven los días de luna llena (uno de cada veintiocho días). Betty tuvo fiesta ayer, Oliana la tendrá pasado mañana y hace diez días había luna llena. ¿Cuántos días faltan par que se vean? ¿Cuántos días libres comunes habrán perdido mientras tanto por falta de luna llena?

32. Sea (a, b, c) una terna pitagórica, esto es, una solución en $\mathbb{Z}^3$ de la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$. Demostrar lo siguiente:

    i) al menos uno de los valores a, b o c es múltiplo de 3;
    ii) abc es múltiplo de 4;
    iii) al menos uno de los valores a, b o c es múltiplo de 5;
    iv) $abc \equiv 0 \ (60)$.

33. Demostrar que si $(a, n) = 1$ y $(b, n) = 1$ la ecuación $ax + by = c$ tiene exactamente n soluciones en $\mathbb{Z}/n$

34. Sea $\mathbb{Z}/10$ el anillo de los enteros módulo 10. Hallar el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas en $\mathbb{Z}/10$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x + 9y = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 6 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\}$$

35. Calcular:
a) $234^{432} \pmod{11}$; b) $145^{197} \pmod{13}$; c) $2025^{2025} \pmod{14}$; d) $4002^{4002} \pmod{35}$.

36. Hallar las raíces del polinomio siguiente en $\mathbb{F}_5$.

$$X^{14} + X^{11} + X^{10} - 3X^5$$

37. Demostrar que $(n^5 - 1)n(n^5 + 1)$ es divisible por 22.

38. Resolver, si es posible, los siguientes sistemas de congruencias:

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv 13 \pmod{91} \\ x \equiv -1 \pmod{119} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x \equiv -5 \pmod{77} \\ x \equiv 17 \pmod{143} \end{array}\right\}$$

39. ¿Cuántas unidades hay en $\mathbb{Z}/2310$? ¿y en $\mathbb{Z}/1764$?

40. Hallar $\phi(n)$ para $5 \leq n \leq 24$.

41. Demostrar que

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ n > 0.$$

(En el sumatorio d recorre todos los divisores positivos de n.)