CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 2

PARA ENTREGAR ANTES DEL 25 DE OCTUBRE DE 2007

1) Demuestra por reducción al absurdo las siguientes afirmaciones:

a) No existe un número natural mayor que todos los demás números naturales.

b) $\log_3 1215$ es irracional.

c) Si en un polígono de 99 lados se trazan 50 diagonales (rectas uniendo vértices no consecutivos) entonces existen dos de ellas que parten del mismo vértice.

2) Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}, U = \{1, 2, 3, 4, 9\}, V = \{2, 4, 6, 8\}$. Calcular:

a) $S \cap U$

b) $(S \cap T) \cup U$

c) $(S \cup U) \cap V$

d) $(S \cup V) \setminus U$

e) $(U \cup V \cup T) \setminus S$

f) $(S \cup V) \setminus (T \cap U)$

g) $(S \times V) \setminus (T \times U)$

h) $(V \setminus T) \times (U \setminus S)$

3) Sea S un conjunto cualquiera, y sea $T = \emptyset$. ¿Qué puedes decir de $S \times T$?

4) Probar las siguientes fórmulas para conjuntos arbitrarios S, T, U y V (Indicación: los diagramas de Venn pueden ser muy útiles para aclarar las ideas, pero no sirven para dar una demostración).

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$

b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$

c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$

d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$

e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

5) Demostrar que si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

6) Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.

7) Dar una descripción explícita del conjunto de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$.

8) Calcular el conjunto de partes del conjunto de partes de $T = \{1, 2\}$.

9) Escribir los conjuntos de partes de los siguientes conjuntos:

$X = \{1, \emptyset, \{a, b\}\}, \quad Y = \{\bullet, \triangle, \partial\}, \quad Z = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$

10) Sea $S = \{a, b, c, d\}$, $T = \{1, 2, 3\}$, y $U = \{b, 2\}$. ¿Cúales de las siguientes afirmaciones son verdaderas?:

a) $\{a\} \in S$

b) $a \in S$

c) $\{a, c\} \subset S$

d) $\emptyset \in S$

e) $\{a\} \in \mathcal{P}(S)$

f) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(S)$

g) $\{a, c, 2, 3\} \subset S \cup T$

h) $U \subset S \cup T$

i) $b \in S \cap U$

j) $\{b\} \subset S \cap U$

k) $\{1, 3\} \in T$

l) $\{1, 3\} \subset T$

m) $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(T)$

n) $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$

ñ) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(S)$

o) $\emptyset \subset \mathcal{P}(S)$

p) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(S)$

11) Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.

12) Probar o demostrar que son falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

13) Definimos *la diferencia simétrica $A \triangle B$ entre dos conjuntos A y B* de la siguiente forma: $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Demostrar lo siguiente:

a) $A \triangle B = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.

b) Para tres conjuntos A, B, C cualesquiera, $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

c) Sean A y B subconjuntos poligonales en el plano. Definimos *la distancia* $\rho(A, B)$ entre estos conjuntos a partir de la fórmula $\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Área}\big(A \triangle B\big)$. Demostrar que la distancia ρ entre subconjuntos poligonales del plano, definida de esta manera, cumple las propiedades usuales de la métrica:

- $\rho(A, A) = 0$;
- $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
- *La desigualdad triangular:* $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

14) Sean A, B, C unos conjuntos dados tales que $B \subset A \subset C$. Encontrar todos los conjuntos X que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C. \end{cases}$$

15) Sean A, B, C unos conjuntos dados tales que $B \subset A$, $A \cap C = \emptyset$. Encontrar todos los conjuntos X que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C. \end{cases}$$

16) Sean $A_1, \ldots, A_n$ unos conjuntos tales que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_1$. Demostrar que $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

En los dos ejercicios siguientes: A es un conjunto arbitrario de índices y para cada $\alpha \in A$, S_α es un conjunto; T es un conjunto cualquiera.

17) Probar las siguientes igualdades (donde $\complement$ denota el complementario en un conjunto universal $\mathcal{U}$):

a) $\complement(\cap_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cup_{\alpha \in A} \complement S_\alpha$

b) $\complement(\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} \complement S_\alpha$

c) $T \cap (\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cup_{\alpha \in A} (T \cap S_\alpha)$

d) $T \cup (\cap_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} (T \cup S_\alpha)$

18) Decimos que los conjuntos S_α son disjuntos si $\cap_\alpha S_\alpha = \emptyset$; y que son disjuntos dos a dos si $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ cuando $\alpha \neq \beta$. Explicar la diferencia entre los dos conceptos y dar ejemplos.

19) Describir el conjunto de verdad de cada uno de los siguientes enunciados (el conjunto universal asociado a las variables se da entre corchetes).

a) $x^2 - 5x + 6 = 0,\ [\mathbb{R}]$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0,\ [\mathbb{Z}]$

c) $x < 3,\ [\mathbb{R}]$

d) $x < 3,\ [\mathbb{N}]$

e) $\exists y (y + 1 < x),\ [\mathbb{N}]$

f) $x^2 + 2 = 0,\ [\mathbb{R}]$

g) $\exists y (x = y^2),\ [\mathbb{R}]$

h) $\exists y (x = y^2),\ [\mathbb{N}]$