CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 1.
PARA ENTREGAR ANTES DEL 15 DE OCTUBRE DE 2007

1) Construye las tablas de verdad de las siguientes proposiciones. ¿Es alguna de ellas una tautología?

a) $(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)$

b) $(P \vee Q) \Longrightarrow (P \wedge Q)$

c) $(P \wedge \neg Q) \Longrightarrow (Q \wedge \neg P)$

d) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

e) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

f) Leyes de De Morgan
$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

2) Comprueba que la proposición $((P \Longrightarrow Q) \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg(\neg R \Longrightarrow \neg P))$ es una contradicción.

3) Demostrar que toda implicación, $P \Longrightarrow Q$, equivale a su contrarrecíproca, $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ (esto da validez al procedimiento de demostración por reducción al absurdo).

4) Escribe el recíproco y el contrarrecíproco de las siguientes frases:

a) Para que llueva es necesario que haya nubes.

b) Para que llueva es suficiente que haya nubes.

c) Una condición necesaria para la paz en el mundo es el desarme mundial.

d) Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.

5) ¿Cuáles de los siguientes pares de proposiciones son lógicamente equivalentes?

a) $A \vee \neg B$ y $\neg A \Longrightarrow B$

b) $A \wedge (\neg A \wedge B)$ y $\neg[\neg A \wedge (A \vee \neg B)]$

c) $A \Longleftrightarrow \neg B$ y $A \Longrightarrow (\neg B \vee \neg A)$

d) $\neg(A \Longrightarrow \neg B)$ y $B \Longrightarrow A$

6) Para cada una de las siguientes proposiciones, formula una lógicamente equivalente usando sólo $S, T, \neg$ y $\vee$ (se pueden usar tantos paréntesis como sean necesarios).

a) $S \Longrightarrow \neg T$

b) $S \wedge (T \vee \neg S)$

c) $(S \Longrightarrow T) \vee (T \Longrightarrow S)$

d) $[\neg(S \vee T)] \Longrightarrow S$.

7) Sean m y n números naturales. Demuestra que si m y n son impares, entonces $m \cdot n$ es impar. Demuestra que si uno de ellos es par, entonces $m \cdot n$ es par. ¿Son estas dos afirmaciones una la recíproca de la otra? Si no lo son, ¿hay alguna relación entre ellas? ¿Son verdaderas sus recíprocas?

8) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.

a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.

b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.

c) La suma de dos números irracionales no es necesariamente irracional.

d) La raíz cuadrada de un número racional no es necesariamente racional.

9) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? (El universo asociado a las variables se da entre corchetes). Escribir en forma positiva la negación de cada enunciado.

a) $\forall x\,(x+1 \geq x),\ [\mathbb{R}]$

b) $\exists x\,(2x+3 = 5x+1),\ [\mathbb{N}]$

c) $\exists x\,(x^2+1 = 2^x),\ [\mathbb{R}]$

d) $\exists x\,(x^2 = 2),\ [\mathbb{R}]$

e) $\exists x\,(x^2 = 2),\ [\mathbb{Q}]$

f) $\exists x\,(x^3+x^2+x+1 \geq 0),\ [\mathbb{R}]$

g) $\forall x \exists y\,(x+y=0),\ [\mathbb{R}]$

h) $\exists x\,\forall y\,(x+y=0),\ [\mathbb{R}]$

i) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(xy = xz),\ [\mathbb{R}]$

j) $\forall x\,\exists y\,(x \geq 0 \Longrightarrow y^2 = x),\ [\mathbb{R}]$

k) $\forall x\,\exists y\,(x \geq 0 \Longrightarrow y^2 = x),\ [\mathbb{N}]$

l) $\forall x\,(x^3+17x^2+6x+100 \geq 0),\ [\mathbb{R}]$

10) Negar los siguientes enunciados y dar los resultados en forma afirmativa.

a) $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}\,(x+y=1)$

b) $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N}\,(x+y=z^2)$

c) $\forall x > 0,\ \exists y < 0\,(x+y=0)$

11) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? ¿Cuáles son falsas? Justifica tu respuesta.

a) Si $3 \cdot 2 = 7$ o $4+4=9$ entonces $5 \cdot 5 = 20$.

b) Si no ocurre que $3^2 = 9$ entonces $4^2 = 42$.

c) Si $2+2=5$ y $3+1=31$ entonces el asesino es el mayordomo.

d) Si $4^2 = 16$ y $4+4=8$ entonces $5 \cdot 5 = 20$.

e) Si no ocurre que $3^2 = 8$ entonces $4^2 = 42$.

12) Demostrar por inducción:

a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

d) La suma de los primeros k números naturales impares es k^2.

e) La suma de los primeros k números naturales pares es k^2+k.

f) Dado $a \in \mathbb{R}, a \neq 1$, se tiene $\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

g) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

13) a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1+2n$.

b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2+1$.

c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.

d) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $b_n = 7^n - 4^n$ es divisible por 3.

14) a) Sean m y n números naturales. Demuestra que si m y n son potencias de 3, entonces $m+n$ no es nunca una potencia de 3.

b) ¿Hay algo especial en el número 3 que aparece en el apartado a)? ¿Qué otros números podrías usar en su lugar?

15) Demostrar que la suma de los ángulos interiores, medidos en radianes, de un polígono convexo con k lados es $(k-2)\cdot\pi$. *Puedes basarte en el valor conocido de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.*