

1.- Las relaciones $u = f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t , digamos $u = u(t)$.

(a) Aplicar la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

donde las derivadas parciales de f están calculadas en el punto $(x(t), y(t))$.

(b) Calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x, y) = e^{xy} \cos xy^2, \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

2.- La sustitución $t = g(x, y)$ convierte $F(t)$ en $f(x, y) = F(g(x, y))$.

(a) Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}.$$

(b) Calcular la matriz de $Df(x, y)$ en el caso particular en que

$$F(t) = e^{\sin t} \quad \text{y} \quad g(x, y) = \cos(x^2 + y^2).$$

3.- El cambio de variables

$$u = \frac{x - y}{2}, \quad v = \frac{x + y}{2},$$

cambia la función $f(u, v)$ en $F(x, y)$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x, y)$ en función de las derivadas parciales de f .

4.- Las ecuaciones $u = f(x, y)$, $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$ definen u como función de las variables (s, t) . Expresar las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

en términos de las diversas derivadas parciales de f , x e y . Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que

$$x(s, t) = st, \quad y(s, t) = \frac{s}{t}.$$

5.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(2x + y)), \quad g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x, y)$ y $Dg(u, v, w)$. Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$. Calcular la matriz de $Dh(1, -1, 1)$.

6.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea h la función compuesta $h = f \circ g$. Demostrar que

$$\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4g(x, y, z) (f'(g(x, y, z)))^2.$$

7.- Sean f una función diferenciable en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 g_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2.$$

8.- Hallar la función derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

9.- Considérese la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) ¿Es $f(x, y)$ continua en $(0, 0)$?

(b) Hallar las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.

(c) Sea $g(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la función compuesta $f \circ g$ y la derivada $(f \circ g)'(0)$. ¿Se puede calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

10.- Hallar las derivadas parciales de la función $F(u, v)$ definida mediante

$$F(u, v) = \int_0^v f(u, t) dt.$$

Utilizar la regla de la cadena para comprobar que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

11.- Sean $f(x)$ y $G(x, y)$ funciones diferenciables tales que $G(x, f(x)) = 0$ se cumple en todos los x donde f está definida.

(a) Demostrar que

$$f'(x) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))}$$

se cumple en todos los puntos $(x, f(x))$ donde el denominador es distinto de 0.

(b) Para $y = f(x)$ definida mediante la ecuación $x^2 + y^3 + e^y = 0$. Hallar $f'(x)$ en términos de x e y .

12.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y , sea ésta $z = f(x, y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0, e) = 2$ y calcular $\nabla f(0, e)$.

13.- Sea $u = u(x, y)$ definida mediante la ecuación $u = F(x+u, yu)$. Hallar $\nabla u(x, y)$ en términos de las derivadas parciales de F .

14.- Las dos ecuaciones

$$e^u \cos v = x, \quad e^u \operatorname{sen} v = y,$$

definen u y v como funciones de x e y , digamos $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, válidas para $x > 0$. Hallar los vectores gradientes $\nabla u(x, y)$ y $\nabla v(x, y)$.

15.- Hallar el vector tangente a la curva $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe el vector tangente en el punto $(0, 0)$?

16.- Una partícula se mueve en el espacio \mathbb{R}^3 por la trayectoria $\sigma(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t^2)$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Determinar su vector velocidad en el punto $(0, \pi/2, \pi^2/4)$ y la recta tangente en dicho punto.

17.- Hallar la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1, 1, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0) . ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

18.- Consideremos el lugar geométrico de los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$. ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

19.- Si (a, b, c) es un punto de la superficie $z = xy$, las dos rectas

$$\begin{cases} z = bx, \\ y = b, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} z = ay, \\ x = a, \end{cases}$$

se cortan en (a, b, c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a, b, c) contiene a esas dos rectas.

20.- Hallar la ecuación de la recta tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.

21.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

22.- Calcular las derivadas direccionales de la funciones:

(a) $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ en el punto $(2, 2, 1)$ en la dirección de la normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.

23.- Definamos la función

$$f(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = (0, 0).$$

Calcular, cuando existan, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

24.- Sea

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = (0, 0).$$

Comprobar que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

25.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = uv^2$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

26.- Demostrar que para cualquier constante positiva c , la función

$$u(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)}$$

con $x, t \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$