1.- Evaluar los límites siguientes, en caso de que existan y explicar porqué no existen en el caso contrario

$(a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$ $(b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$ $(c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x e^y}{x+y+2}.$

$(d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0),\, x\neq y} \dfrac{x^3-xy^2}{|x|-|y|}.$ $(e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}.$ $(f)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy-xz+yz}{x^2+y^2+z^2}.$

2.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$(a)\ f(x,y)=x^4+y^4-4\,x^2y^2.$ $(b)\ f(x,y)=\tan\dfrac{x^2}{y}.$ $(c)\ f(x,y)=\dfrac{1}{\log(x^2+y^2)}.$

$(d)\ f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}.$ $(e)\ f(x,y)=\dfrac{\cos x^2}{y}.$ $(f)\ f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0,0)$?

4.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

$(a)\ f(x,y)=x^2+y^2\operatorname{sen} xy.$

$(b)\ f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2},}$ definida en los $(x,y)\neq(0,0)$.

$(c)\ f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$, definida para los $x\,y\neq 1$.

5.- Considérese la función definida en los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y)=\frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{si } x\neq 0, \qquad\qquad f(0,y)=0.$$

(a) Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y calcular su valor.

(b) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(c) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(d) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cada dirección $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

6.- Demuéstrese que la función $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano y tiene las derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

7.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\[2mm] 0 & \text{si } x=y=0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

8.- Demostrar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \exp\big(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\big) & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$.

9.- Considérese la función

$$f(x,y)=(x^2+y^4)^2\ \text{máx}\{|3x+y|,|x-y|\}\,.$$

(a) Calcular las derivadas parciales y estudiar si f es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Demostrar que f es diferenciable en el punto $(3,-2)$ y calcular su diferencial en ese punto.

(c) ¿Existen las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(-1,1)$?

10.- Sean $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x)=\|x\|^4$ y $f(x)=\langle a,x\rangle$, siendo $a\in\mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_vf(x)$ y $D_vg(x)$ para cada $x,v\in\mathbb{R}^n$.

(b) Tomando $n=2$, hallar todos las direcciones $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tales que $D_{(u,v)}g(2,3)=6$.

(c) Tomando $n=3$, hallar todos las direcciones $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ tales que $D_{(u,v,w)}g(1,2,3)=0$.

11.- Sea $f(r,t)=t^n\,e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r\geq 0$ y $t>0$. Hallar un valor de la constante n tal que $f(r,t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big)\qquad (r,t>0)\,.$$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x,y)=e^x\cos y$.

(b) $f(x,y,z)=\log(x^2+2\,y^2-3\,z^2)$.

(c) $f(x,y)=xy\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$.

13.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y)=(y,x,xy,y^2-x^2)$, $a=(1,2)$.

(b) $f(x,y)=(\text{sen}(x+y),\cos(x-y))$, $a=(\pi,-\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z)=z^2\,e^x\cos y$, $a=(0,\pi/2,-1)$.

(d) $f(x)=(e^x\,\text{sen}\,x,e^x\cos x,x^2)$, $a=\pi/6$.

(e) $f(x,y,z,t)=(\sqrt{y^2+z^2},\sqrt{x^2+z^2},x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a=\Big(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},3\Big)$.