NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. Cuando se pide en un apartado responder SI o NO, responder *únicamente* SI o NO, marcando adecuadamente la opción elegida.

I) Los puntos asignados a cada pregunta de este problema son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos.

1) Las funciones no negativas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con las habituales suma de funciones y multiplicacion por escalares, forman un espacio vectorial. SI NO

2) Las matrices simétricas $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, forman un espacio vectorial. SI NO

3) Los polinomios de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$, forman un espacio vectorial. SI NO

4) Una base no puede contener el vector 0. SI NO Es decir, $\bar{0} \notin$ base.

5) Si los vectores en $E := \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ son linealmente independientes, lo mismo sucede con cualquier subconjunto de E. SI NO

6) Si los vectores en $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ son linealmente independientes y además, $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. SI NO

II) (2 puntos) Resolver $z^2 = i$.

1) En coordenadas rectangulares, o cartesianas, o binómicas

$z^2 = (a+ib)^2 = i \iff a^2 - b^2 + i\,2ab = i$, luego

$a^2 = b^2$, $a = \pm|b| = \pm b$, y además $2ab = 1$. Si $a = -b$,

$-2a^2 = 1$, imposible, a y b son reales.

Luego $a = b$, $2a^2 = 1$, $a = b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Soluciones: $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

2) En polares, $z^2 = i = e^{i(2\pi k + \frac{\pi}{2})}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $(k=0)$, $z_2 = e^{i\frac{1}{2}(2\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $(k=1)$

Otros valores de k vuelven a dar ó z_1 ó z_2.

Además,

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

III) Sea P_3 el espacio de polinomios de grado $n \leq 3$, y sea $T(p) = p''$ (la derivada segunda). Hallar la matriz que representa a T con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$, incluyendo los pasos empleados para obtenerla (es decir, no basta simplemente con dar la respuesta final).

$$T(a_0 \bar{1} + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$$

$$= a_0 T\bar{1} + a_1 Tt + a_2 Tt^2 + a_3 Tt^3 = \star$$

$$T\bar{1} = \bar{0}, \quad Tt = \bar{0}, \quad Tt^2 = 2\cdot\bar{1}, \quad Tt^3 = 6t$$

$$\star = a_0 \bar{0} + a_1 \bar{0} + a_2 \cdot 2 \cdot \bar{1} + a_3 \cdot 6t,$$

luego

$$T \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$