NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. Cuando se pide en un apartado responder V (verdadero) o F (falso), responder *únicamente* V o F, marcando adecuadamente la opción elegida. Mirar el otro lado de esta hoja.

I) Los puntos asignados a cada pregunta de este problema son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos.

1) La dimensión del espacio de matrices reales $M_{m\times n}$ no es $m+n$. V F Es $m\times n$.

2) No existen sistemas lineales homogeneos sin al menos una solución. V F $\overline{x}=\overline{0}$ es solución.

3) Las operaciones elementales con filas preservan el rango de una matriz. V F

4) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ no son similares. V F $tr(A) \neq tr(B)$

5) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ no son similares. V F $\det A \neq \det B$

II) (5 puntos) Hallar todas las soluciones del siguiente sistema, o demostrar que no las tiene:

$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10$
$3x_1 - x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1$
$-5x_1 + 3x_2 - 15x_3 - 6x_4 = 9.$

No hay soluciones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & -15 & -6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & -2 & -29 \\ 0 & 8 & -20 & 4 & 59 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & 10 & -2 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

III) (5 puntos) Hallar la matriz que representa, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, a la proyección ortogonal T sobre el eje $x = y$.

Sean $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1)^T, (-1,1)^T\}$.

Denotamos por $[T]_{\mathcal{B}_i}$ la matriz de T con respecto a $\mathcal{B}_i$, y por $I_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j}$ la matriz que expresa $\mathcal{B}_j$ en términos de $\mathcal{B}_i$ (matriz de cambio de base).

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$[T]_{\mathcal{B}_1} = I_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\,[T]_{\mathcal{B}_2}\,I_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, se puede normalizar $\mathcal{B}_2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T\}$. Entonces $I_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $I_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$