1) Resolver los siguientes sistemas lineares:
a) $x + y + z = 2$
$2x + 3y - z = 8$
$x - y - z = -8.$

SOLUCION: $x = -3, y = 19/4, z = 1/4.$

b) $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10$
$3x_1 - x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1$
$-5x_1 + 3x_2 - 15x_3 - 6x_4 = 9.$

SOLUCION: Inconsistente (o incompatible, como dicen algunos).

c) $3x - y + 7z = 0$
$2x - y + 4z = 1/2$
$x - y + z = 1$
$6x - 4y + 10z = 3.$

SOLUCION: $x = -1/2 - 3z, y = -3/2 - 2z$, con z arbitraria.

d) $2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1$
$2x_3 + 3x_4 = 4$
$2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4$
$2x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 7.$

SOLUCION: $x_1 = 19/2 - 9x_4, x_2 = -5/2 + 17x_4/4, x_3 = 2 - 3x_4/2$, con x_4 arbitraria.

2) Resolver:

- $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= 3 + 6i \end{aligned}\right\}$ SOLUCION: $(4 + 3i, 1 - 3i)$.
- $\left.\begin{aligned} x + y + iz + t &= 0 \\ 2x - y + 2z - t &= 1 \\ x + iy - z + it &= 2 \\ x + y + z - t &= 0 \end{aligned}\right\}$ SOLUCION: $(1 + i, -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i, -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i, -\frac{11}{10} + \frac{3}{10}i)$.

3) Probar que el siguiente sistema es consistente si y sólo si $c = 2a - 3b$, y en tal caso resolverlo:
$2x - y + 3z = a$
$3x + y - 5z = b$
$-5x - 5y + 21z = c.$

SOLUCION: $x = (a + b)/5 + 2z/5, y = (-3a + 2b)/5 + 19z/5$, con z arbitraria.

4) Hallar t tal que el siguiente sistema sea consistente, y resolverlo a continuación:
$x + y = 1$
$tx + y = t$
$(1 + t)x + 2y = 3.$

SOLUCION: $t = 2; x = 1, y = 0.$

5) Resolver el sistema homogéneo
$-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0.$

SOLUCION: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, con x_4 arbitraria.

6) Versión general del problema anterior: resolver el sistema homogéneo $n \times n$
$(1-n)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$
$x_1 + (1-n)x_2 + \cdots + x_n = 0$
.
.
.
$x_1 + x_2 + \cdots + (1-n)x_n = 0.$
Sugerencia: poner la matriz del sistema en forma escalonada reducida.

SOLUCION: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, con x_n arbitraria.

7) Determinar los números racionales r para los cuales el sistema homogéneo
$x + (r-3)y = 0$
$(r-3)x + y = 0$
tiene alguna solución no trivial.

SOLUCION: $r = 2, r = 4$.

8) Resolver
$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$

SOLUCION: $x_1 = -x_3/4, x_2 = -x_3/4 - x_4$, con x_3 y x_4 arbitrarias.

9) Determinar para que racionales r el siguiente sistema (i) no tiene soluciones (ii) tiene exactamente una solución (iii) infinitas soluciones:
$x + 2y - 3z = 4$
$3x - y + 5z = 2$
$4x + y + (r^2 - 14)z = r + 2.$

SOLUCION: $r = -4$, sin solución; $r = 4$, infinitas soluciones; en los demás casos, exactamente una solución.

10) Si $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales, demostrar que para todo t real, también lo es $((1-t)a_1 + tb_1, \ldots, (1-t)a_n + tb_n)$.

11) Demostrar que si $(a_1, \ldots, a_n)$ es una solución de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales, y $(b_1, \ldots, b_n)$ es la solución general del sistema homogéneo asociado, entonces $(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$ es la solución general del sistema original.

12) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A en los siguientes casos

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

i.e. encontrar una matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tal que $AB = I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
SOLUCIONES:

a) $B = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{pmatrix}$. b) No existe.