ÁLGEBRA I. HOJA 3

1. Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$ las matrices sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Comprobar que en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathcal{K})$:

a) La suma es asociativa.

b) Cada matriz tiene opuesto (inverso aditivo).

c) Sea $m = n$. Entonces el producto de matrices es distributivo (a derecha y a izquierda), con respecto a la suma de matrices.

2. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
comprobar que no existe una matriz B tal que $AB = I = BA$.

3. Siendo A y B las matrices dadas a continuación, calcular los productos AB y BA cuando sea posible y comparar los resultados.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 86 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

4. ¿Será cierta para matrices cuadradas la relación $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? [Probar la relación, o suministrar un contraejemplo]. Determinar que sucede en el caso especial en el que las matrices son de la forma $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5. Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando AB, siendo A y B las matrices dadas a continuación:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

¿Es cierto que $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$? Comprobarlo.

6. Hallar la forma general de las matrices 3×3, reales o complejas, que conmutan con
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Hallar las matrices 2×2 reales tales que su cuadrado es $-I$.

8. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (C_1, C_2), \;\; B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

comprobar que $AB = C_1F_1 + C_2F_2$. Generalizar este resultado para matrices de dimensiones multiplicables.

9.

a) ¿Qué transformación tiene lugar en la matriz C dada a continuación cuando la multiplicamos por la matriz diagonal D, también dada a continuación?

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) ¿Cuáles son las matrices diagonales que conmutan con todas las demás?

c) Demostrar que una matriz que no es diagonal no conmuta con todas las demás. Deducir de éste ejercicio y del anterior la forma de las matrices que conmutan con todas las demás.

10. Multiplicando las dos matrices A y B dadas a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que:

a) La primera fila del producto AB es la suma de las filas de B, multiplicadas por los números de la primera fila de A, considerados como coeficientes.

b) La primera columna de AB es la suma de las columnas de A, multiplicadas por los números de la primera columna de B, considerados como coeficientes.

Análogamente, ¿Qué ocurre con las demés filas y columnas del producto?

11. Se llaman matrices *elementales* las obtenidas de la matriz identidad, haciendo alguna de las siguientes transformaciones:

1) Permutación de dos filas.
2) Suma de una fila por otra (distinta), multiplicada por un número.
3) Multiplicación de una fila por un número distinto de cero.

a) Escribir todas las matrices elementales 3×3.

b) Escoger una matriz cualquiera y comprobar que al multiplicar ésta matriz por otra elemental por la izquierda, se realiza en la matriz escogida, la transformación que había tenido lugar para obtener la matriz elemental. Generalizar el resultado.

12. Una matriz *simétrica* (respectivamente, *antisimétrica*) es aquella que cumple $A = A^t$ (respectivamente, $A = -A^t$), siendo A^t la matriz traspuesta de A. Probar que:

a) Probar que una matriz antisimétrica tiene nulos todos los elementos en la diagonal principal.

b) Una matriz que es simétrica y antisimétrica ha de ser la matriz nula (todos sus elementos son 0).

c) Dada una matriz cuadrada A, la matriz $1/2(A + A^t)$ es simétrica.

d) Dada una matriz cuadrada A, la matriz $1/2(A - A^t)$ es antisimétrica.

e) Toda matriz cuadrada se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

13. Entre las matrices cuadradas complejas se definen las matrices *hermíticas* como aquellas que verifican $a_{ij} = \overline{a_{ji}}\ \forall ij$ (o bien, $A = \overline{A^t}$). Respectivamente, las *antihermíticas* como aquellas que verifican $A = -\overline{A^t}$. Probar que:

a) Una matriz hermítica tiene todos los elementos de la diagonal principal reales.

b) Una matriz antihermítica tiene todos los elementos de la diagonal principal imaginarios puros.

c) Una matriz a la vez hermítica y antihermítica ha de ser la matriz nula.

d) Toda matriz cuadrada compleja se puede escribir como suma de una matriz hermítica y otra antihermítica.

14. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Comprobar que el producto de matrices simétricas no es necesariamente una matriz simétrica, realizando el producto AB.

b) Comprobar que hay casos en que los sí es simétrico, realizando el producto CD.

c) Comprobar que $AB = (BA)^t$, mientras que $CD = DC$ (esto es, C y D *conmutan*).

15. Demostrar que dadas dos matrices simétricas A y B, conmutan si y sólo si su producto es una matriz simétrica. Encontrar matrices simétricas que conmuten y que no conmuten distintas de las del ejercicio anterior.

16. Probar que si A es simétrica y B antisimétrica, A y B conmutan si y sólo si su producto es una matriz antisimétrica.

17.

a) Demostrar que toda matriz simétrica real o compleja 2×2 que conmute con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un múltiplo de la identidad.

b) Idem para la matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$