ÁLGEBRA I. HOJA 11

1. Calcular los determinantes siguientes:

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

   Sol: 12, -4, -1, -8

2. Calcular los determinantes de las matrices dadas a continuación:

$$a)\left|\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right| \qquad b)\left|\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right|$$

   Sol: a) -1, b) 1

3. Demostrar que los siguientes determinantes son nulos:

$$a)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

4. a) Comprobar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) del espacio es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

   y hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $(1, 2, 1)$, $(-1, 3, 0)$, $(2, 1, 3)$.

   b) Escribir la ecuación de una recta del plano que pasa por los puntos (a, b), (c, d) del plano y hallar la ecuación cartesiana de la recta del plano que pasa por los puntos $(-1, -2)$, $(2, 2)$.

5. a) Siendo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P(x)$ un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 0$.

   Sol: $2 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$.

   b)Demostrar que siempre se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones $\{P(x_i) = y_i\}_{i=1}^4$ siempre que todos los $x_1, \dots, x_4$ sean distintos.

   c) Generalizar el resultado b): dados n+1 pares de puntos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n+1}$ con $x_1, \dots, x_{n+1}$ distintos, hay un único polinomio $P(x)$ de grado n que cumple $P(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n+1$.

   Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función polinómica de grado n que pase por $n + 1$ puntos del plano siempre y cuando no haya dos puntos en la misma vertical.

6. a) Obtener, en términos de los determinantes de los menores diagonales de la matriz A,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

   (Indicación: descomponer las filas en sumandos con y sin λ).

b) Aplicar la fórmula obtenida para hallar los siguientes determinantes:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \left| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I \right|$$

sol: $-\lambda^3+6\lambda^2-7\lambda+2$, $-\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda+1$

7. Encontrar los valores de a para que las siguientes matrices sean invertibles:

$$a)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad c)\begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: a) $a \neq 1$, $a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ b) $a \neq 2$ y $a \neq -2$ c) $a \neq -1$ y $a \neq \frac{1}{2}$.

8. Sean matrices cuadradas $A \in M_{m\times m}$, $B \in M_{n\times n}$, $C \in M_{m\times n}$ y $D \in M_{(m+n)\times(m+n)}$ una matriz que se descompone por bloques como

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $|D| = |A||B|$ utilizando la descomposición

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

b) Demostrar, utilizando una descomposición similar, la misma igualdad $|D| = |A||B|$, en el caso

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

(Nótese que ahora $C \in M_{n\times m}$).

c) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 7 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & 4 & -2 & & & \\ & & & 1 & 4 & 5 & & \\ & & & & & & 2 & 3 \\ & & & & & & & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: -240.

9. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\left\{ \begin{array}{rcr} x+2y-z & = & 7 \\ 2x+y+z & = & 6 \\ x-y+3z & = & -1 \end{array} \right. \quad b)\left\{ \begin{array}{rcr} 2x+3y-5z-2 & = & 0 \\ 3x-y+2z+1 & = & 0 \\ 5x+4y-6z-3 & = & 0 \end{array} \right. \quad c)\left\{ \begin{array}{rcr} 2x+y+4z+8t & = & -1 \\ x+3y-6z+2t & = & 3 \\ 3x-2y+2z-2t & = & 8 \\ 2x-y+2z & = & 4 \end{array} \right.$$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos por substitución o aplicando el método de Gauss.

Sol: a)(5/3,8/3,0), b)(-1/5,14/5,6/5), c)(2,-3,-3/2,1/2).

10. Estudiar la compatibilidad y carácter determinado/indeterminado de los sistemas siguientes aplicando el teorema de Rouché-Frobenius según el cálculo del rango de las matrices correspondientes a los sistemas siguientes:

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3 & = & 1 \\ x_2+x_3 & = & 2 \\ x_1+3x_2 & = & 3 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2 & = & 5 \\ x_1-x_2 & = & 1 \\ x_1+2x_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{rcl} x_1-3x_2+x_3 & = & 2 \\ 3x_1-8x_2+2x_3 & = & 2 \\ 2x_1-5x_2+x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Sol: a) S.C.I b) S. I. c) S.I.

11. Hallar los valores de a y b que hagan compatibles los sistemas

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} bx-ay-az & = & a \\ -bx -az & = & a \\ -bx-by-bz & = & b \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcl} bx-ay-az-at & = & a \\ -bx -az-at & = & a \\ -bx-by -at & = & a \\ -bx-by-bz & = & a \\ -bx-by-bz-bt & = & b \end{array}\right.$$

sol: a) Para cualesquiera valores de a y b, b) Si $a=0$.

12. Hallar los valores de a para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados.

$$a)\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\} \qquad b)\left.\begin{array}{r} (a+1)x+y+2z=-2 \\ 2x+y+(a+1)z=3 \\ x+(a+1)y+2z=-2 \end{array}\right\} \qquad c)\left.\begin{array}{r} -x+ay+az=0 \\ ax-y+az=0 \\ ax+ay-z=0 \end{array}\right\}$$

sol: a) $a=-2$ ó $a=1$ b) $a=-4$ ó $a=0$ c) $a=-1$ ó $a=\frac{1}{2}$