

ÁLGEBRA I. HOJA 6

1. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^5 \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

2. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 2a + b - c + d = 0 \\ a + b + c - d = 0 \end{array} \right\}$$

3. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x - 1$.

4. Comprobar que el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por $\{(1, 0, 1, -1), (1, -1, 1, -1)\}$ coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

5. Comprobar que los subespacios S_1 y S_2 de \mathbb{R}^5 cuyas ecuaciones son los sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right\} \equiv S_1 \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right\} \equiv S_2$$

son iguales.

6. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, -1), (1, -1, 3, 1)\}, \\ S_2 &= \mathcal{L}\{(3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1), (7, 1, 2, -1)\}, \\ S_3 &= \mathcal{L}\{(0, 2, 5, 0)\}. \end{aligned}$$

7. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de \mathbb{R}^5 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 3, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2, 1)\}, \\ S_2 &= \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, 0, 0), (3, 1, 0, -1, 1)\} \end{aligned}$$

8. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(1, -5, 2, 0), (1, -1, 0, 2)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3, -5, 2, 1), (2, 0, 0, 1)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

9. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0)(2, 1, 0, -1)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3, 1, 0, -1)(1, 1, -1, -1)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

10. Sean

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0, 1)(2, 1, 0, -1, 0)(2, 0, 1, 0, 1)\} \quad y \quad S_2 = \mathcal{L}\{(3, 1, 0, -1, 0)(1, 1, -1, -1, -1)\},$$

comprobar que $S_1 + S_2 = S_1$ y $S_1 \cap S_2 = S_2$.

11. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(1, 1, 2, 0)(-2, 0, 1, 3)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(0, 2, 5, 0)(-1, 1, 3, 2)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

12. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(0, 1, 1, 0)(1, 0, 0, 1)\}$ y

$$S_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

13. Siendo

$$S_1 \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \quad y \quad S_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

14. Siendo F_1 el plano de ecuación $x + 2y - z = 0$ y F_2 la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Averiguar si son complementarios.

15. Siendo $V_1 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y $V_2 = \mathcal{L}\{(0, 1, 1)\}$. Averiguar si son complementarios.

16. Comprobar que son complementarios los subespacios de ecuaciones:

$$S_1 \equiv \begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 7x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad S_2 \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

17. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1 = \mathcal{L}\{(0, 2, 5, 0), (-1, 1, 3, 2)\}$.

b) $S_2 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$.

18. Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ donde

$$S_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad S_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

¿Cuál es $S_1 + S_2$?

19. Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$, donde

$$S_1 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad S_2 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

20. En $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios que conmutan con cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar una base de cada uno de ellos, de su suma y de su intersección.

b) Hallar una base de un espacio complementario del subespacio de las matrices que conmutan con A .

21. Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dados los subespacios vectoriales $S_1 = \{A | AM = A\}$ y $S_2 = \{B | MB = B\}$. Encontrar dimensiones y bases de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

22. Hallar los subespacios suma e intersección de los siguientes subespacios de las matrices cuadradas de orden n :

a) El subespacio de las matrices triangulares superiores de orden n y el subespacio de las matrices triangulares inferiores.

b) El subespacio de las matrices simétricas de orden n y el subespacio de las matrices antisimétricas de orden n .

23. Consideramos los subespacios del espacio de polinomios de grado ≤ 3 S_1 , formado por los polinomios múltiplos de $x + 1$, y S_2 , formado por los polinomios múltiplos de $x - 1$. Hallar los subespacios suma e intersección de S_1 y S_2 .

24. En \mathbb{R}^4 sean $U = \mathcal{L}\{u_1, u_2\}$ y $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1, 1, 2, -\lambda), \quad u_2 = (-1, 1, 0, -\lambda), \quad v_1 = (1, \lambda, 2, -\lambda), \quad v_2 = (2, 3, \lambda, 1).$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U , V , $U + V$ y $U \cap V$.