ÁLGEBRA I. HOJA 5

1. Estudiar los rangos de las siguientes matrices como función de λ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Estudiar, según los valores de λ, la compatibilidad, o consistencia, de los sistemas $AX = b$, donde la matriz $(A|b)$ es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & \lambda & 5 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right).$$

3. Comprobar que el conjunto de todas las matrices con entradas reales (o complejas) no es un espacio vectorial.

4. Comprobar que el conjunto de polinomios de grado fijo n no es un espacio vectorial.

5. Estudiar si son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ los siguientes subconjuntos:

a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y - x = 0\}$,

b) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y - x = 1\}$,

c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$,

d) $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = |x|\}$,

e) $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |y| = |x|\}$,

f) $S_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\}$.

6. **a)** Comprobar que aunque $\mathbb{Q}$ está contenido en $\mathbb{R}$ y sus operaciones están inducidas por las de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ (considerado como espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{R}$).

b) Comprobar que $\mathbb{R}$ no es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

c) Comprobar que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$.

d) Sabiendo que para todo n, la cardinalidad de $\mathbb{Q}^n$ es estrictamente menor que la de $\mathbb{R}$, probar que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{Q}$. Probar que en este caso $\mathbb{Q}$ sí es un subespacio de $\mathbb{R}$.

7. Estudiar si son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}$, considerado como espacio vectorial complejo,

a) el conjunto de los números reales,

b) el conjunto de los números imaginarios puros.

8. Estudiar si son subespacios vectoriales del espacio vectorial real de funciones reales de variable real los siguientes subconjuntos:

a) $S_1 = \{f; f(0) = 0\}$,

b) $S_2 = \{f; f(1) = 0\}$,

c) $S_3 = \{f|\, f(0) = 1\}$.

9. Averiguar si son subespacios vectoriales de los correspondientes espacios vectoriales los siguientes subconjuntos:

a) El subconjunto de los polinomios de variable real y con coeficientes reales, dentro de las funciones reales de variable real.

b) El subconjunto de los polinomios de grado $\leq n$, de variable real y con coeficientes reales, siendo n fijo, dentro del espacio vectorial de las funciones reales de variable real.

c) El subconjunto de polinomios divisibles por $x - 1$, grado ≤ 3, de variable real y con coeficientes reales, como subconjunto del espacio vectorial de los polinomios de variable real, grado ≤ 3, y con coeficientes reales.

10. Averiguar si son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ los siguientes subconjuntos:

a) Las matrices 2×2 con números racionales.

b) Las matrices de números reales de orden 2×2 de traza cero. (Se llama traza de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal).

c) Las matrices de números reales de orden 2×2 de rango 1.

d) Las matrices de números reales de orden 2×2 que conmutan con la matriz B, siendo B una matriz fija 2×2.

11. Averiguar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$:

a) Las matrices diagonales.

b) Las matrices triangulares superiores.

c) Las matrices simétricas (las que satisfacen que $A^t = A$).

d) Las matrices antisimétricas (las que satisfacen que $A = -A^t$).

12. Averiguar si el subconjunto de las matrices escalonadas de m filas y n columnas, es un subespacio vectorial del espacio de matrices con entradas reales (o complejas) de orden $m \times n$.