ÁLGEBRA I. HOJA 10

1. Estudiar si son independientes en su espacio vectorial correspondiente los siguientes conjuntos. En el caso en que sean linealmente dependientes, expresar uno de ellos como combinación lineal de los restantes:

a) $\{(1,2,0),(0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

b) $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$,

c) $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

d) $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,1,0),(3,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

e) $\{(i,1-i),(2,-2i-2)\} \subset \mathbb{C}^2$,

f) $\{(i,1,-i),(1,i,-1)\} \subset \mathbb{C}^3$.

g)

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

h) Los polinomios $\{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3\} \subset P^3_{\mathbb{R}}[x]$.

2. a) Demostrar que si $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ son funciones tales que existen $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ verificando

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

son funciones linealmente independientes.

Demuestra los siguientes enunciados utilizando el apartado anterior:

b) Los polinomios $\{1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n\} \subset P^n_{\mathbb{R}}[x]$ son linealmente independientes.

c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, los polinomios $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\} \subset P^n_{\mathbb{R}}[x]$ son linealmente independientes para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

3. Estudiar si los siguientes conjuntos son bases de los espacios vectoriales dados:

a) $\{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$

b) $\{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,2,1,0),(0,1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\right.$.

4. Encontrar bases de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

a) Las matrices diagonales.

b) Las matrices triangulares superiores.

c) Las matrices triangulares inferiores.

d) Las matrices simétricas.

e) Las matrices antisimétricas.

5. **a)** Siendo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, demostrar que los vectores:

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \cdots, \quad u_{n-1} = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1}, \quad u_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n$$

son otra base de $\mathbb{R}^n$.

b) Hallar las coordenadas de los vectores $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ y $(1, 2, \cdots, n-1, n)$ de $\mathbb{R}^n$, en la base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

6. Hallar las coordenadas del vector $(3, 2, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ en la base

$$B = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}.$$

7. Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

8. Encontrar los valores de a para los que los vectores $\{(a, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, a)\}$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

9. Demostrar que si los vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ son linealmente independientes, los vectores $\{a, b, a \times b\}$ son una base de $\mathbb{R}^3$. ($a \times b$ denota el producto vectorial).

10. Hallar los números complejos z para los cuales los vectores: $\{(z + i, 1, i), (0, z + 1, z), (0, i, z - 1)\}$ no forman una base considerados como vectores del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

11. Comprobar que una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ está formada por $\{1\}$, pero una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es $\{1, i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

12. Calcular la dimensión y extraer una base del subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$\{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 3, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2, 1)\}.$$

13. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$.

14. Calcular según los valores de α, β y γ la dimensión del subespacio vectorial:

$$E = \mathcal{L}\{(1,1,0),(2,1,\alpha),(3,0,\beta),(1,\gamma,1)\}$$

15. Dado el subespacio vectorial de las matrices cuadradas 2×2 generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

extraer una base del subespacio considerado, de este sistema de generadores.

16. Dado el subespacio vectorial de los polinomios de grado 3 generado por los vectores: $\{x^2-1, x^2+1, x^3+4, x^3\}$ extraer una base de este sistema de generadores.

17. Dada la base $B = \{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,2,1,0),(0,1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$, hallar las matrices de cambio de base

a) de la base B a la base canónica.

b) de la base canónica a la base B.

18. Siendo $B_1 = \{v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (0,1,0,-1), v_3 = (0,1,1,0), v_4 = (0,0,0,1)\}$ y $B_2 = \{w_1 = (1,0,0,1), w_2 = (1,0,1,0), w_3 = (0,2,1,0), w_4 = (0,1,0,1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^4$, hallar:

a) Las coordenadas del vector $3w_1 + 2w_2 + w_3 - w_4$ en la base $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b) Las coordenadas del vector $3v_1 - v_3 + 2v_2$ en la base $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

c) La matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

d) La matriz de cambio de base de B_2 a B_1.

19. **a)** Hallar las matrices de cambio de base en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ entre las siguientes bases:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$y \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ directamente en las dos bases anteriores y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.

20. **a)** Escribir las matrices de cambio de base en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales entre las bases $B_1 = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ y $B_2 = \{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$.

b) Hallar las coordenadas del polinomio $1 + x + x^2 + x^3$ directamente en las dos bases y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.