ÁLGEBRA I. HOJA 7

1. Probar que el triángulo formado por los puntos (-3, 5, 6), (-2, 7, 9) y (2, 1, 7) es un triángulo rectangulo. Hallar los otros ángulos.

2. Probar que los puntos (2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 3, 6) están en la misma recta.

3. Sea L la recta que pasa por (-2, 1, 3) y (1, 2, 4). Hallar el punto de L más próximo al origen, y la distancia mínima.

Respuestas: $(-16/11, 13/11, 35/11)$, $\sqrt{150/11}$.

4. Hallar el área del triángulo con vertices $(3,0,2), (6,1,4), (2,1,0)$.

5. Comprobar que $((a,b),(c,d))_1 := ac - 2ad - 2bc + 5bd$ define un producto escalar en el plano real.

6. Calcular las normas de los vectores $u = (1,2)$ y $v = (4,5)$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot,\cdot)_h$ y con respecto al producto $((a,b),(c,d))_1 = ac - 2ad - 2bc + 5bd$. Calcular también $(u,v)_h$ y $(u,v)_1$.

7. Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Probar que la traza define un producto escalar en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mediante $(A,B) := tr(B^t A)$.

8. Probar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, con producto escalar $(A,B) = tr(B^T A)$.

9. Sea $P(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$. Probar que $(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto escalar en $P(\mathbb{R})$.

10. Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 2, con el producto escalar $(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $1 + 3t$.

11. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $(1,2,3)$ en $\mathbb{R}^3$.

12. Hallar el ángulo entre los vectores e_1 y $(1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

13. Sean $u = (z_1, z_2)$ y $v = (w_1, w_2)$ vectores en $\mathbb{C}^2$. Comprobar que $(u,v)_1 := z_1\overline{w_1} + (1+i)z_1\overline{w_2} + (1-i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$ define un producto escalar en $\mathbb{C}^2$.

14. Calcular las normas de los vectores $u = (1-i, 2+3i)$ y $v = (4+2i, 5+i)$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot,\cdot)_h$ y con respecto al producto $(u,v)_1 := z_1\overline{w_1} + (1+i)z_1\overline{w_2} + (1-i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$. Calcular también $(u,v)_h$ y $(u,v)_1$.