ÁLGEBRA I. HOJA 1

1. Resolver utilizando la regla de Ruffini las ecuaciones:

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \qquad x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0.$$

3. Resolver las ecuaciones:

   a) $6x^2 - 5x + 1 = 0.$

   b) $12x^3 - 40x^2 + 27x - 5 = 0.$

   c) $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0.$

   d) $12x^3 - 32x^2 + 25x - 6 = 0.$

   e) $6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$

4. Comprobar que, en el cuerpo de los números complejos, tienen tantas soluciones como su grado, las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - x + 1 = 0.$$
$$x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0.$$
$$2x^3 + 4x^2 - 3x + 9 = 0.$$
$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0.$$
$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \\ 2\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
$$x^6 + 4x^4 + 5x^2 + 2 = 0.$$
$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$$
$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0.$$
$$6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$
$$6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$
$$x^5 + x^4 - x - 1 = 0.$$
$$6x^4 + x^3 + 11x^2 + 2x - 2 = 0.$$
$$12x^4 + x^3 + 11x^2 + x - 1 = 0.$$
$$6x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 11x + 4 = 0.$$
$$4x^4 + 4x^3 - 11x^2 + 4x - 15 = 0.$$
$$4x^4 + 16x^3 + 31x^2 + 64x + 60 = 0.$$

5. Factorizar los polinomios igualados a cero en las ecuaciones anteriores y en las siguientes:

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0. \qquad x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0.$$
$$6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0. \qquad x^7 + x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 4x + 4 = 0.$$

   Observar que algunas no son totalmente factorizables en binomios de grado 1 con coeficientes reales. Cuando se admiten los coeficientes complejos, o bien hay tantos factores como el grado de la ecuación, o bien llamando al número de veces que se repite un factor, multiplicidad de ese factor, la suma de las multiplicidades de los factores de primer grado es igual al grado de la ecuación.

6. Demostrar que en un cuerpo, se tiene $b \cdot 0 = 0$, cualquiera que sea b.

7. Demostrar que en un cuerpo, si $a \neq 0$, $ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

8. Probar que en un conjunto de números que sea un cuerpo, la ecuación $a_1 x + a = 0$ tiene solución única si $a_1 \neq 0$. No tiene solución si $a_1 = 0$ y $a \neq 0$. Tiene infinitas soluciones si $a_1 = 0 = a$.

9. Hallar los siguientes números complejos en forma binómica:

$$(1+2i)(1-2i),\ \frac{1+2i}{1-2i}, \qquad \left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2, \qquad \frac{(1+2i)^3}{(2-i)^3},\ \frac{(1+2i)^3}{(2-2i)^3}.$$

10. Hallar un número complejo en forma binómica: $a + bi$ tal que $(a + bi)^2 = 1 + i$.

11. Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

12. Resolver la ecuación $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

13. Demostrar

    a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

14. Demostrar que para todo polinomio $p(z)$ con coeficientes reales, $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

15. Demostrar:

    a) $|\overline{z}| = |z|$.

    b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ usando coordenadas rectangulares.

    c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

16. De los números complejos enunciados a continuación calcular su módulo y su argumento y escribirlos en forma trigonométrica y en forma polar.

$$1+i,\ 1-i, \qquad -1-i, \qquad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

17. Comprobar que cualquier número complejo tiene el mismo módulo que su conjugado y que su opuesto. ¿Cuál es la relación entre los argumentos de un número complejo, su conjugado y su opuesto?

18. Suponiendo conocidos el módulo y el argumento de un número complejo, hallar el módulo y el argumento de su inverso.

19. Demostrar utilizando la forma binómica y la forma polar de los números complejos que:

    a) El producto de un número por su conjugado es un número real.

    b) El cociente de un número por su conjugado es de módulo 1. Observar que la demostración usando la forma polar es más corta.

    c) Comprobar los resultados anteriores en los cálculos siguientes:

$$(1+2i)(1-2i), \qquad \frac{3+4i}{3-4i},$$

    d) Utilizar los resultados anteriores para calcular:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

20. Probar la asociatividad de la multiplicación de números complejos usando su expresión en forma polar y comparar la simplicidad del cálculo respecto del que hay que hacer para demostrarla en forma binómica.

21. Calcular en forma polar y en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{-4}, \qquad \sqrt{i}, \qquad \sqrt{-i}.$$

Comprobar que los resultados son los mismos.

22. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{1+i}, \qquad \sqrt{-2+2i}.$$

Comparando las expresiones determinar el valor de $\cos(\pi/8)$ y $\cos(3\pi/8)$.

Comprobar que $\cos^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) = 1$. ¿Por qué?

23. Expresar las siguientes raíces en forma binómica utilizando la forma trigonométrica correspondiente y el ejercicio anterior.

$$\sqrt[4]{-16}, \qquad \sqrt[3]{-8}, \qquad \sqrt[3]{-27i}, \qquad \sqrt[4]{16i}.$$

24. Hallar las raíces cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.

25. Hallar las raíces quintas de la unidad. Señalar cuáles son las raíces que son conjugadas entre sí.

26. Hallar las siguientes raices:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt[6]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

¿Cómo están relacionadas entre sí?

27. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^6 + 1 &= 0, \\ x^6 + 2x^3 + 1 &= 0, \\ x^6 + x^3 + 1 &= 0, \\ x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^7 + x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 6x + 2 &= 0, \\ 2x^7 - x^6 + 4x^4 + 2x^3 + 2x - 1 &= 0, \\ 2x^7 + x^6 + 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 &= 0, \\ 4x^8 - x^6 - 8x^5 + 2x^3 + 4x^2 - 1 &= 0, \\ 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Comprobar que la suma de las multiplicidades de las soluciones complejas (entre ellas las reales) de cada ecuación es igual a su grado.

28. Habiendo comprobado que $(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)(x - 1) = x^n - 1$, demostrar que

    a) Las soluciones complejas y las soluciones reales de $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ son raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad.

    b) La ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real.

c) La ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿Cuál es la solución real si n es impar?

d) Las raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$.

29. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6 + x^5 - x - 1 = 0, \qquad x^7 + x^6 - x - 1 = 0,$$

$$2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0, \qquad 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Comprobar que la suma de las multiplicidades de las soluciones complejas (entre ellas las reales) de cada ecuación es igual a su grado.

30. Deducir de la fórmula de De Moivre $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$

a) Las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple.

b) Las fórmulas análogas para el ángulo quíntuple.

31. Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$.