
ALGEBRA I **Examen Final, Convocatoria Extraordinaria** CURSO 2011/12

NOMBRE Y APELLIDOS:
DNI: GRUPO:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas hojas.
IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo).
IMPORTANTE: En los problemas II, III y IV las respuestas deben justificarse adecuadamente.

I) (Respuesta correcta: 1 punto, respuesta incorrecta: - 1 punto, en blanco: 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos.)
Responde *únicamente* V (verdadero) o F (falso), marcando adecuadamente la opción elegida.

1) Sea $c \in \mathbb{C}$. Entonces T, definida mediante $Tz = cz$, es una aplicación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$. **V**

$T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = c(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 c z_1 + \lambda_2 c z_2 = \lambda_1 T(z_1) + \lambda_2 T(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2) La función $Tz := \overline{z}$, es una aplicación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$. **V**

$T(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = T(z_1) + T(z_2)$, para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y
$T(\lambda \cdot z) = \overline{\lambda \cdot z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} = \lambda \cdot \overline{z} = \lambda \cdot T(z)$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

3) La función $Tz := \overline{z}$, es una aplicación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{C}$. **F**

Si tomamos un escalar, por ejemplo, $\lambda = i$ y un elemento del espacio vectorial no nulo, por ejemplo, $z = 1$, tenemos que $T(\lambda z) = \overline{i \cdot 1} = -i \neq \lambda T(z) = i \cdot \overline{1} = i$.

4) Dada una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión, si A es una matriz asociada a esta aplicación y $\det(A) \neq 0$, entonces la apliación es bijectiva. **V**

Si llamamos T a esta aplicación lineal, observamos por un lado que es inyectiva (el sistema $Ax = 0$ solo posee la solución trivial) y por el otro T es sobreyectiva (el sistema $Ax = y$ tiene siempre solución).

5) Si A es una matriz $n \times n$, entonces $\det(A^t A) = \det(AA^t)$. **V**

$\det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)\det(A^t) = \det(AA^t)$.

6) Matrices con el mismo determinante representan a la misma aplicación lineal, quizá con respecto a bases distintas. **F**

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que las aplicaciones representadas por A tiene todas el núcleo de dimensión 2 mientras que las representadas por B tiene todas el núcleo de dimensión 1. Por lo tanto, aunque $\det(A) = \det(B) = 0$, no pueden representar a la misma aplicación lineal.

7) Matrices escalonadas que representan a la misma aplicación lineal tiene igual número de pivotes. **V**

Ya que el número de pivotes coincide con la dimensión del espacio imagen de la aplicación.

8) Matrices cuadradas y escalonadas que representan a la misma aplicación lineal tiene igual número de pivotes. **V**

Mismo motivo.

9) Si $B = \{v_1, \ldots, v_{2n}\} \subset \mathbb{R}^n$, entonces todo $v \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse como combinación lineal de vectores en B. **F**

En $\mathbb{R}^2$, el vector $(0,1)$ no se puede expresar como combinación lineal de $\{(1,0),(2,0),(0,0),(3,0)\}$.

10) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ es una aplicación lineal sobre $\mathbb{R}$, entonces $\dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T) = n$ donde Ker denota el núcleo de la aplicación. **V**

Fórmula de las dimensiones.

II) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & -2t & = 0 \\ -x & & -5z & +3t & = 0 \\ & -2y & +6z & & = 0 \\ -x & +y & -8z & +4t & = 0 \end{array}\right\}$$

a) (10 puntos) Calcula una matriz escalonada asociada al sistema escribiendo el sistema en forma matricial.

b) (5 puntos) ¿Qué dimensión tiene el subespacio de soluciones de este sistema?

c) (5 puntos) Calcula las soluciones del sistema o justifica que no tiene.

(Escribe los pasos empleados en el método de Gauss).
Utilizamos el método de Gauss para escalonar la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_4 = F_4 + F_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{F_3 = F_3 + 2F_2 \\ F_4 = F_4 - 2F_2}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La dimensión del espacio de soluciones es 1 (el número de columnas sin pivotes o la dimensión del espacio ambiente menos el rango de la matriz de coeficientes $4-3$).
Seguimos utilizando el método de Gauss para calcular las soluciones:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{F_1 = F_1 + F_3 \\ F_2 = F_2 - \frac{1}{2}F_3}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto las soluciones son $(x,y,z,t) = (-5\lambda, 3\lambda, \lambda, 0) = \lambda(-5,3,1,0)$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

III) (20 puntos) Sabiendo que los vectores a y b son linealmente independientes, decidir razonadamente si los vectores $\{a, b, a \times b\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ o no.

Si $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$, entonces el producto vectorial es

$$a \times b = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Para demostrar que forman una base tenemos que comprobar que son linealmente independientes y que generan todo el espacio.

Veamos ahora que, en este caso, estas dos condiciones son equivalentes. Si llamamos A a la matriz formada por los tres vectores en columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & (a\times b)_1 \\ a_2 & b_2 & (a\times b)_2 \\ a_3 & b_3 & (a\times b)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

tenemos que los tres vectores

- son linealmente independientes si y sólo si el rango de la matriz A es 3, y
- generan todo el espacio si y sólo si el sistema $Ax = y$ tiene solución para cualquier vector de términos independientes, lo que es también es equivalente a que el rango de la matriz A sea 3.

Por lo tanto, el problema se reduce a comprobar si A tiene rango 3 o si $\det(A)$ es no nulo:

$$\det(A) \overset{\text{desarrollo } C_3}{=} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

Observamos ahora que como a y b son linealmente independientes alguno de los determinantes 2×2 es distinto de cero, por lo que alguno de los sumandos es postivo (estrictamente mayor que cero) y los otros dos son o bien positivos o bien cero, por lo tanto $\det(A)$ es distinto de cero, el rango de A es 3 y los vectores a, b y $a \times b$ linealmente independientes.

COMENTARIO DE JESUS: Gracias a Mari Luz por escribir las soluciones. En mi opinión, también bastaría responder que como tenemos tres vectores en $\mathbb{R}^3$, es suficiente comprobar la independencia lineal para demostrar que tenemos una base. Pero la independencia lineal es obvia, al ser $a \times b$ perpendicular al subespacio generado por a y b, y ser estos dos vectores linealmente independientes. Es decir, $a \times b$ no pertenece a $Span\{a, b\}$, luego no puede expresarse como combinación lineal de a y b. Por otro lado, cualquier vector v de la forma $v = c_1 a + c_2 b + c_3 a \times b$, donde c_1, c_2 y c_3 son escalares con $c_3 \neq 0$, cumple $v \notin Span\{a, b\}$. Luego si escribimos $a = c_1 a + c_2 b + c_3 a \times b$, entonces $c_3 = 0$, y por independencia lineal entre a y b, $c_2 = 0$, $c_1 = 1$. Del mismo modo, si $b = c_1 a + c_2 b + c_3 a \times b$, entonces $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$.

IV) (20 puntos) Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 2, con el producto escalar $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $1 + 3t$.

El complemento ortogonal de $\mathcal{L}(\{1 + 3t\})$, $(1 + 3t)^{\perp}$, es el subespacio vectorial de $P_2(\mathbb{R})$ formado por todos los polinomios "perpendiculares" a $1 + 3t$ con el producto escalar dado.

Por lo tanto, un polinimio $a+bt+ct^2 \in (1+3t)^{\perp}$ si

$$(a+bt+ct^2, 1+3t) = \int_0^1 (a+bt+ct^2)(1+3t)dt = \int_0^1 \big(a+(3a+b)t+(3b+c)t^2+3ct^3\big)dt$$
$$= at + \frac{(3a+b)t^2}{2} + \frac{(3b+c)t^3}{3} + \frac{3ct^4}{4}\Big]_{t=0}^{1} = \frac{5a}{2} + \frac{3b}{2} + \frac{13c}{12} = 0,$$

o lo que es lo mismo, si

$$a = -\frac{3}{5}b - \frac{13}{30}c,$$

Entonces

$$(1+3t)^{\perp} = \left\{ \left(\frac{-3}{5}b - \frac{-13}{30}c \right) + bt + ct^2 : b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y, por ejemplo, $\left\{ \dfrac{-3}{5} + t, \dfrac{-13}{30} + t^2 \right\}$ y $\{3-5t, 13-30t^2\}$ son bases de este subespacio.