10	20	20	20	70

ALGEBRA I **Examen Final, Convocatoria Ordinaria** CURSO 2011/12

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI: Mr. Fantástico.

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas hojas. Cuando se pide en un apartado responder V (verdadero) o F (falso), responder *únicamente* V o F, marcando adecuadamente la opción elegida.
IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo).
IMPORTANTE: En los problemas II, III y IV las respuestas deben justificarse adecuadamente.

INFORMACION: Los puntos asignados a las preguntas VERDADERO o FALSO son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo de cualquier problema: 0 puntos.

I) 1) Todo polinomio de grado n sobre $\mathbb{C}$ tiene n raíces (contadas según su multiplicidad). V
Teorema Fundamental del Álgebra.

2) Si T es lineal, entonces $T(0) = 0$. V
$T(0) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0$.

3) Si A es una matriz $n \times n$, entonces $A^T A = AA^T$. F
Contraejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Si A es una matriz $n \times n$, entonces $tr(A^T A) = tr(AA^T)$. V
En general, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas $n \times n$ tenemos que

$$tr(AB) = \sum_{j=0}^{n} (AB)_{jj} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_{kj} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{jj} = tr(BA).$$

5) Sea A una matriz $n \times n$. El sistema $Ax = y$ tiene solución única si y sólo si A^{-1} existe. V
Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema tiene solución unica si y sólo si $rg(A) = n$ y esto es equivalente a que $|A| \neq 0$ y a que exista A^{-1} porque A es una matriz cuadrada $n \times n$.

6) Si una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva entonces es sobreyectiva. V
Como T es inyectiva, $Nuc(T) = \{0\}$. De $dim(Nuc(T)) + dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^n)$ deducimos que $dim(Im(T)) = n$ y como $Im(T) \subset \mathbb{R}^n$ tenemos que $Im(T) = \mathbb{R}^n$, por lo que T es sobreyectiva.

7) Si $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces $k \leq n$. V
En un espacio vectorial de dimensión n hay como mucho n vectores linealmente independientes.

8) Dados dos subespacios S_1, S_2 de $\mathbb{R}^n$, $dim(S_1 + S_2) = dim(S_1) + dim(S_2)$. F
Contraejemplo: si $S_1 = S_2 = \{x = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $S_1 + S_2 = \{x = 0\}$ y
$1 = dim(S_1 + S_2) \neq dim(S_1) + dim(S_2) = 2$.

9) Si para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se cumple $u \perp v$, entonces $u = 0$. V
Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ en la base canónica, como u es perpendicular a los elementos de la base canónica, tenemos que $(u, e_i) = u_i = 0$ para $i = 1 \dots n$ y, por lo tanto, $u = 0$.

10) La matriz 20×20 cuyas entradas son todas 20, es diagonalizable. V
Teorema Espectral, la matriz dada es simétrica.

II) a) (5 puntos) Dadas $x, y \in \mathbb{R}$, sea $T(x,y) = 2x - y$. Hallar la matriz que representa T con respecto a las correspondientes bases canónicas.

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Como $T(e_1) = T(1,0) = 2$ y $T(e_2) = T(0,1) = -1$ la matriz es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)(5 puntos) Probar que los vectores $v_1 = (3/11, 1/11)$ y $v_2 = (2/11, -3/11)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

Como son dos vectores en un espacio de dimensión dos, lo único que hay que probar es que son linealmente independientes viendo, por ejemplo, que el siguiente determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 1/11 & -3/11 \end{vmatrix} = (-9-2)/11^2 = -1/11 \neq 0.$$

c) (10 puntos) Sea $B_1 = \{e_1, e_2\}$ la base canónica del plano real $\mathbb{R}^2$, y sea T la aplicación lineal definida (en la base B_1) mediante multiplicación por $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz que representa a T con respecto a $B_2 = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (3/11, 1/11)$ y $v_2 = (2/11, -3/11)$.

Nos piden calcular la matriz A' que aparece en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \text{ con } B_1 \arrow[r, "T", "A"'] & \mathbb{R}^3 \text{ con } B_1 \arrow[d, "Id_{\mathbb{R}^3}", "M_{B_1\to B_2}"'] \\
\mathbb{R}^3 \text{ con } B_2 \arrow[u, "M_{B_2\to B_1}"', "Id_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[r, "T", "A'"'] & \mathbb{R}^3 \text{ con } B_2
\end{tikzcd}$$

$$A' = M_{B_1\to B_2} \cdot A \cdot M_{B_2\to B_1}.$$

Las matrices de cambio de base son:

$M_{B_2\to B_1} = \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 1/11 & -3/11 \end{pmatrix}$ y $M_{B_1\to B_2} = (M_{B_2\to B_1})^{-1}$ que calculamos con el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3/11 & 2/11 & 1 & 0 \\ 1/11 & -3/11 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1/11 & -3/11 & 0 & 1 \\ 3/11 & 2/11 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2=F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1/11 & -3/11 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1=F_1+3/11F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1/11 & 0 & 3/11 & 2/11 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{F_1=11F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow M_{B_1\to B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A' = M_{B_1\to B_2} \cdot A \cdot M_{B_2\to B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 1/11 & -3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

III) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +3z & & = & 2 \\ -2x & -3y & -9z & +t & = & -2 \\ & y & +3z & +2t & = & 1 \\ x & +4y & +12z & -3t & = & -4 \end{array}\right\}$$

a) (10 puntos) Escribe el sistema en forma matricial y calcula una matriz escalonada asociada al sistema.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -9 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 12 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 = F_3 + F_2 \\ F_4 = F_4 + 3F_2 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b) (10 puntos) Calcula las soluciones del sistema o justifica que no tiene.

$$\begin{array}{c} F_3 = 1/3F_3 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 = F_2 - F_3 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_1 = F_1 + F_2 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 = -F_2 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son: $(x, y, z, t) = (3, -1-3\lambda, \lambda, 1) = (3, -1, 0, 1) + \lambda(0, -3, 1, 0)$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV) a) (10 puntos) Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (4-6)(6+8+45-36-10-6) = -2 \cdot 7 = -14.$$

Alternativamente, es fácil poner la matriz en forma triangular superior usando el método de Gauss, y calcular el determinante como producto de las entradas de la diagonal principal.

b) (10 puntos) Hallar los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Los autovalores son las raíces de la ecuación algebraica $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 = C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 5-\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_2}}{=} (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(5-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0.$$

Por lo tanto, los autovalores son 2 y 5.

Alternativamente, se puede calcular el determinante de forma directa, y a continuación usar Ruffini para buscar las posibles raíces racionales.