PARA ENTREGAR EL LUNES 14 DE MARZO, O ANTES

**1)** Sea $T(x) = x/2$ en $[0,1]$, y sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Decidir razonadamente si el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(T(x))$ existe, y en que sentido, identificandolo en caso de respuesta afirmativa.

**2)** Sea $([0,1], \text{Lebesgue}, dx)$ el intervalo unidad con los conjuntos y la medida de Lebesgue. Decidir razonadamente si $T(x) = 2x \bmod 1$ preserva la medida.

**3)** Sean $f = \chi_{[0,1]}$, $T(x) = x + 1$, y $(\mathbb{R}, \text{Lebesgue}, dx)$ la recta real con los conjuntos y la medida de Lebesgue. Decidir razonadamente si el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f \circ T$ existe, y en cual o cuales de los siguientes sentidos, identificandolo en caso de respuesta afirmativa.

**a)** En medida.
**b)** En casi todo punto.
**c)** En $L^1$.
**d)** En $L^2$.
**e)** En $L^\infty$.
**f)** Uniformemente.

**4)** Sea $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ con la probabilidad uniforme $P(\{i\}) = 1/10$, y sigma álgebra el conjunto de partes de $X$. Sea $T$ la permutación de $X$ dada por $T = (12)(3467)(58)$. Decidir razonadamente si el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f \circ T$ existe, y en cual o cuales de los siguientes sentidos, identificandolo en caso de respuesta afirmativa.

**a)** En medida.
**b)** En casi todo punto.
**c)** En $L^1$.
**d)** En $L^2$.
**e)** En $L^\infty$.
**f)** Uniformemente.

**5)** Probar que para todo $0 < r < s \leq \infty$, en un espacio de probabilidad siempre tenemos $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ para todo $f$ medible. Decidir razonadamente si es cierto que $L^s \subset L^r$.

**6)** Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: casi todos los puntos en $([0,1], \text{Lebesgue}, dx)$ contienen un número infinito de ochos en su expansión decimal.