Due on Wednesday 28th.

1) Pepe y Jaime juegan con una moneda equilibrada. Pepe elige la sucesión 101 y Jaime, 001. El juego termina la primera vez que una de estas sucesiones aparece, ganando quien la haya elegido. Calcular la probabilidad de que gane Pepe. Calcular la probalibidad de que ganase Pepe si Jaime hubiera elegido 110, en vez de 001. Calcular la duración media de este último juego. Si lanzamos la moneda hasta que sale 101, calcular el número medio de lanzamientos. Hacer lo mismo con 110.

2) In a Galton-Watson branching process, let X_n denote the number of individuals belonging to the n-th generation, and let μ denote the expected number of offsprings of any given individual. Determine whether the process $\{X_n/\mu^n\}_{n\geq 0}$ is a martingale with respect to the natural filtration.

3) Let $\{N_t\}_{t\geq 0}$ be a Poisson process with rate λ. Determine whether $\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}(t^{-1}N_t)$ exists, and if so, find it.

Do the following, but do not turn them in.

The total variation is one of the many ways to define a distance on the space of probability measures. In the following problems you are asked to prove some basic facts about the total variation when $\Omega = \mathbb{Z}$.

4) Sean μ y ν medidas de probabilidad en $\mathbb{Z}$. Definimos la distancia entre μ y ν, dada por la variación total, como $\|\mu - \nu\|_{TV} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu(k) - \nu(k)|$. Probar que $\|\mu - \nu\|_{TV} = 2\sup_{A\subset\mathbb{Z}} |\mu(A) - \nu(A)|$. Sugerencia: Considerar $A = \{\mu \geq \nu\}$.

5) Probar que $\|\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2\|_{TV} \leq \|\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2\|_{TV}$, donde la convolución se define como $P * Q(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(n-k)Q(k)$.

6) Probar que $\|\mu_1 \times \mu_2 - \nu_1 \times \nu_2\|_{TV} \leq \|\mu_1 - \nu_1\|_{TV} + \|\mu_2 - \nu_2\|_{TV}$.

7) Probar que $\|\mu_1 * \cdots * \mu_n - \nu_1 * \cdots * \nu_n\|_{TV} \leq \sum_{k=1}^{n} \|\mu_k - \nu_k\|_{TV}$. Sugerencia. Usar inducción.