Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Muchos de estos problemas son básicamente un repaso o recordatorio de cursos anteriores. Entregar UNICAMENTE los números 2, 11 y 12.

1) En un examen tipo test se plantean 5 preguntas para responder verdadero o falso. Los puntos asignados a las preguntas V o F son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos. Es decir, si la puntuación es negativa se asigna un cero al problema.
a) Calcular la nota esperada de un alumno que responda a las 5 perguntas de manera aleatoria, por ejemplo lanzando una moneda equilibrada 5 veces.
b) Sabiendo que el alumno ha respondido correctamente a la primera pregunta, calcular la nota esperada.

2) Lanzamos un dado equilibrado de 4 caras dos veces. Sea W la variable aleatoria que toma como valor el máximo de los dos lanzamientos. A continuación lanzamos una moneda equilibrada W veces, usando S para denotar el número de unos obtenido. Todos los lanzamientos son independientes.
a) Hallar $E(S|W)$.
b) Hallar $E(S)$.

3) Buscad la definición de la varianza condicional si no la habeis visto antes, y la regla de la varianza total.

4) Lanzamos una moneda lastrada, con probabilidad de sacar 1 igual a 3/5. Si sale 1 lanzamos un dado equilibrado con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y si sale cruz lanzamos un dado equilibrado con seis caras numeradas del 1 al 6. Sea Y el número obtenido al lanzar el dado, y sea X el número obtenido al lanzar la moneda.
Hallar 1) $E(Y|X)$, 2) $E(Y)$, 3) $\mathrm{Var}(E(Y|X))$, 4) $\mathrm{Var}(Y|X)$, 5) $\mathrm{Var}(Y)$.

5) Decimos que la sucesión de v.a. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en media de orden $p > 0$ a la v.a. X (en el caso particular $p = 2$ decimos que hay convergancia en media cuadrática) si

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

cuando $p < \infty$, y

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ess\,sup} |X_n - X| = 0$$

cuando $p = \infty$.

a) Probar que para todo par s, p tal que $0 < s < p \leq \infty$, se cumple $\|X\|_s \leq \|X\|_p$ (sugerencia: usar Jensen o Hölder). Concluir que la convergencia en media de orden p implica convergencia en media de orden s para todo $0 < s < p$, y además implica convergencia en probabilidad.

b) Los recíprocos no son ciertos; proporcionar contraejemplos.

6) Estudiar para $\alpha > 0$ la convergencia en media cuadrática de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, sabiendo que

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

7) Dada la información $E[X] = 7$ y $\mathrm{Var}(X) = 9$, usar la desigualdad de Chebyshev-Markov para acotar inferiormente $P(4 \leq X \leq 10)$. Con las mismas hipótesis, hallar los valores máximo y mínimo que puede tomar $P(4 < X < 10)$.

8) Determinar si para toda $\mu \geq 0$, toda $\sigma \geq 0$, y toda $c > \sigma$, existe una v.a. X con media μ y desviación típica σ tal que

$$P(|X-\mu| \geq c) = \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

Más adelante veremos desigualdades maximales, que en cierto sentido mejoran la desigualdad de Chebyshev-Markov.

9) Dadas tres variables aleatorias X, Y, Z y una función de Borel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, probar las siguientes afirmaciones:

a) $E[Y\ g(X)\ |X] = g(X)\ E[Y|X]$.

b) $E[E[Y|X,Z]\ |X] = E[Y|X] = E[E[Y|X]\ |X,Z]$.

10) Dadas dos variables aleatorias X e Y con media cero, demostrar las siguientes afirmaciones:

a) X y $E[X|Y]$ tienen correlación positiva.

b) El coeficiente de correlación de Y y $E[X|Y]$ tiene el mismo signo que el de X y Y.

11) Demostrar la desigualdad de Jensen condicional: si $X : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ es convexa, y $X, g(X) \in L^1$, entonces $g(E(X|\mathcal{B})) \leq E(g(X)|\mathcal{B})$.

12) Demostrar la siguiente versión condicional de Chebyshev: Si $a > 0$, entonces

$$P(|X| \geq a|\mathcal{B}) \leq E\left(\frac{X^2}{a^2}|\mathcal{B}\right).$$

13) Sea $X : [0,1) \to [0,1)$ la función $X(w) = w^2$, donde a $[0,1)$ se le asigna la probabilidad uniforme (en este caso, la medida de Lebesgue). Sea $\mathcal{A}_n := \sigma([0,1/2^n), [1/2^n, 2/2^n), \ldots, [(2^n - 1)/2^n, 1))$ la σ-álgebra generada por los intervalos diádicos $[j/2^n, (j+1)/2^n)$, $j = 1\ldots, n-1$. Calcular $E(X|\mathcal{A}_n)$. Decidir razonadamente si la sucesión de v.a. $\{E(X|\mathcal{A}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge (y en caso de respuesta afirmativa, determinar a qué) en alguno de los siguientes sentidos: a) uniformemtente, b) en L^p, determinando para que valores de p hay convergencia, c) en casi todo punto, d) en medida.

14) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala, y $0 < r \leq s \leq \infty$, entonces $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, donde $\|X\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p$.

15) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala, y $\|X\|_s < \infty$, donde $1 \leq s < \infty$, entonces $Y := \{|X_n|^s\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala en L^1.

16) Sea $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una martingala en L^2. Probar que los incrementos son ortogonales, donde los incrementos se definen como $Y_0 := X_0$, y para $n > 0$, $Y_n := X_n - X_{n-1}$. Es decir, demostrar que si $j \neq k$, entonces $(Y_j, Y_k) = \int Y_j Y_k = 0$.