III) (5 puntos) En un examen tipo test se plantean 5 preguntas para responder verdadero o falso. Los puntos asignados a las preguntas V o F son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos. Es decir, si la puntuación es negativa se asigna un cero al problema.

a) Calcular la nota esperada de un alumno que responda a las 5 perguntas de manera aleatoria, por ejemplo lanzando una moneda equilibrada 5 veces.

b) Sabiendo que el alumno ha respondido correctamente a la primera pregunta, calcular la nota esperada.

Sea X = puntuación obtenida.

a) Hallar EX. Sean $\{Y_i\}_{i=1}^{5}$ v.a.i. con $P(Y_i=1) = P(Y_i=-1) = \frac{1}{2}$, sea $Y = \sum_{i=1}^{5} Y_i$; $X = Y^+ = \max\{Y, 0\}$.

$X = 1 \iff$ se producen 3 aciertos y 2 fallos

$X = 3 \iff$ " " 4 " y 1 fallo

$X = 5 \iff$ " " 5 " .

En los demás casos, $X = 0$.

$$E(X) = 1\binom{5}{3}\frac{1}{2^5} + 3\binom{5}{4}\frac{1}{2^5} + 5\binom{5}{5}\frac{1}{2^5}$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{5\cdot 4}{2} + 3\cdot 5 + 5\right] = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$$

b) Hallar $E(X \mid Y_1 = 1)$.

$$E(X \mid Y_1=1) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{5} Y_i\right)^+ \Big| \, Y_1 = 1\right) = E\left(\left(1 + \sum_{i=2}^{5} Y_i\right)^+ \Big| \, Y_1=1\right)$$

$$= E\left[\left(1 + \sum_{i=2}^{5} Y_i\right)^+\right] \text{ por independencia de } Y_1.$$

Ahora calculamos como antes: $\left(1 + \sum_{i=2}^{5} Y\right)^+ = 1 \iff$ se producen exactamente 2 aciertos, $\left(1 + \sum_{i=2}^{5} Y_i\right)^+ = 3 \iff$

" " " 3 " , " $= 5 \iff$

" " " 4 " .

$$E(X \mid Y=1) = 1\cdot\binom{4}{2}\frac{1}{2^4} + 3\binom{4}{3}\frac{1}{2^4} + 5\binom{4}{4}\frac{1}{2^4}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{4\cdot 3}{2} + 3\cdot 4 + 5\right] = \frac{23}{16}$$

IV) (5 puntos) Lanzamos una moneda lastrada, con probabilidad de sacar 1 igual a 3/5. Si sale 1 lanzamos un dado equilibrado con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y si sale cruz lanzamos un dado equilibrado con seis caras numeradas del 1 al 6. Sea Y el número obtenido al lanzar el dado, y sea X el número obtenido al lanzar la moneda. Hallar $E(Y|X)$ y $E(Y)$.

Como los eventos $\{X=0\}$ y $\{X=1\}$ definen una partición de Ω, en cada conjunto de la partición la esperanza condicional es la media.

$$E(Y \mid X=0) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(Y \mid X=1) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$E(Y) = E(E(Y \mid X))$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2} + \frac{3}{5}\frac{5}{2} = \frac{14+15}{10} = \frac{29}{10}$$

V) (10 puntos) Sea $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una martingala en L^2. Probar que los incrementos son ortogonales, donde los incrementos se definen como $Y_0 := X_0$, y para $n > 0$, $Y_n := X_n - X_{n-1}$. Es decir, demostrar que si $j \neq k$, entonces $(Y_j, Y_k) = \int Y_j Y_k = 0$.

Supongamos sin perdida de generalidad que $j > k$, luego $j-1 \geq k$.

$$E\, Y_j Y_k = E\left(E(Y_j Y_k \mid \mathcal{a}_{j-1})\right)$$

$= E\left(Y_k\, E(Y_j \mid \mathcal{a}_{j-1})\right)$ al ser Y_k $\mathcal{a}_{j-1}$ medible

$= E\left(Y_k\, E(X_j - X_{j-1} \mid \mathcal{a}_{j-1})\right)$ por definición de Y_j

$= E(Y_k \cdot 0) = 0$ ya que $E(X_j - X_{j-1} \mid \mathcal{a}_{j-1}) = 0$

casi seguro, al ser $E(X_j \mid \mathcal{a}_{j-1}) = X_{j-1}$ c.s.