PROCESOS ESTOCÁSTICOS **Examen Final** CURSO 2012/13

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregad *únicamente* esta hoja. Si no os cabe la demostración, encontrad una más corta. Mirad las dos caras.

1) (5 puntos) Demostrar la siguiente afirmación:

Si $1 < p < \infty$ y $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala en L^p, tal que para todo $n \geq 0$, $\|X_n\|_p > 0$, entonces para todo $n \geq 0$, $\|X_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|X\|_p$.

COMENTARIOS: 0) $X_n^* := \max\{|X_0|, \ldots, |X_n|\}$.
1) $\|X\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p$.
2) Puede usarse sin demostración la identidad $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu\{|f| > t\}dt$.

---

1) En el enunciado se asume $\|X_n\|_p > 0$ y $\sup \|X_n\|_p < \infty$, de modo que se pueden usar sin más. No se pedía demostrar la desigualdad de tipo débil (1,1).

---

2) $B_t(\omega)$ es una función continua de t para cada $\omega \in \Omega$, luego $\int_0^1 |B_t(\omega)|dt$, $\int_0^1 B_t^2(\omega)dt$ son integrales corrientes y molientes de funciones continuas.

2.1) F. Paramos en cuanto ganamos 1 vez, doblamos la apuesta si perdemos. "$EX_T = EX_0$" requiere algo más (ej. $T \leq$ constante $< \infty$, ver el teor. de parada opcional de Doob.

2.2) $B^2 \geq 0$, luego por Fubini-Tonelli

$$E\int_0^1 B_t^2 dt = \int_\Omega \int_0^1 B^2(t,\omega)dt\, dP(\omega) = \int_0^1 \int_\Omega B^2(t,\omega)dP(\omega)dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$ V

2.3) $\forall \omega \in \Omega$, $\left(\int_0^1 |B(t,\omega)| dt\right)^2 \leq \int_0^1 B^2(t,\omega)\, dt$

por Jensen, y por 2.2): V.:

$$E\left(\int_0^1 |B_t| dt\right) \leq \left[E\left(\left(\int_0^1 |B_t| dt\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(E \int_0^1 B_t^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \leq 1.$$

2.4) $\int_0^1 t\, dB_t = B_t \Big|_0^1 - \int_0^1 B_t\, dt = B_1 - \int_0^1 B_t\, dt$;

$$E\left(\int_0^1 t\, dB_t\right) = E B_1 - E \int_0^1 B_t\, dt = 0 - \int_0^1 (E B_t)\, dt = 0$$

(Por 2.2), podemos usar Fubini-Tonelli ahí). V.

2.5) Fórmula de Itô: $f'(x) = x$, $f''(x) = 1$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{1}{2}\left(B_1^2 - B_0^2\right) = \frac{1}{2} B_1^2 = \int_0^1 B_t\, dB_t + \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \int_0^1 B_t\, dB_t + \frac{1}{2}$$

$$E\left(\int_0^1 B_t\, dB_t\right) = E\left(\frac{1}{2} B_1^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} E B_1^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

INSTRUCCIONES: Responder *únicamente* V o F, marcando adecuadamente la opción elegida. Los puntos asignados son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. No se obtiene puntuación inferior a cero.

2) 1) Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una martingala, y sea T un tiempo de parada con $P(T < \infty) = 1$. Entonces $E(X_T) = E(X_0)$. V F

2) Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar. Entonces $E\left(\int_0^1 B_t^2\, dt\right) = 1/2$. V F

3) Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar. Entonces $E\left(\int_0^1 |B_t|\, dt\right) \leq 1$. V F

4) Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar. Entonces $E\left(\int_0^1 t\, dB_t\right) = 0$. V F

5) Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar. Entonces $E\left(\int_0^1 B_t\, dB_t\right) = 0$. V F