Parte 1.

1) Sean $N, X_1, X_2, \ldots,$ variables aleatorias independientes, con $N : \Omega \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, es decir, N toma valores enteros positivos. Supongamos además que las variables $X_1, X_2, \ldots$ pertenecen a L^2 y están distribuidas identicamente (en particular, todas tienen la misma media y la misma varianza). Dada $S(w) := \sum_{i=1}^{N(w)} X_i(w)$, calcular $E(S|N)$, $E(S)$, y $\operatorname{Var}(S)$. Sugerencia: ver Prob 9.6, 1, p.147 de las fotocopias.

2) Pepe y Jaime juegan con una moneda equilibrada. Pepe elige la sucesión 101 y Jaime, 001. El juego termina la primera vez que una de estas sucesiones aparece, ganando quien la haya elegido. Calcular la probabilidad de que gane Pepe. Calcular la probalibidad de que ganase Pepe si Jaime hubiera elegido 110, en vez de 001. Calcular la duración media de este último juego. Si lanzamos la moneda hasta que sale 101, calcular el número medio de lanzamientos. Hacer lo mismo con 110.

3) En un mundo con dos paises A y B, sin nacimientos ni muertes, sabemos que en cada período de tiempo el 5 % de la población emigra a B, mientras que el 10 % de la población de B emigra a A. Determinar que sucede a largo plazo. (Sugerencia: en vez de usar la matriz de transición P, usar su traspuesta -simplemente por hábito-. Hallar los autovalores y autovectores de P^T, y deducir las conclusiones adecuadas).

4) Si N es un proceso de Poisson con intensidad λ, probar que $\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}(t^{-1}N_t) = 0$ (p.169, 4).

5) Probar el lema de Kronecker: si $\{r_n\}_1^\infty$ es una sucesión de números reales y $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots$ satisface $\lim_n b_n = \infty$, entonces la convergencia de $\sum_{i=1}^\infty x_i/b_i$ a un número real implica que $\lim_n b_n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

6) Probar que si μ es una medida en el espacio X, y $f : X \to [0, \infty)$ es medible, entonces para todo $1 \leq p < \infty$, $\int_X f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu\{f > t\}dt$.

Parte 2.

7) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces para todo $n > 0$ tenemos $EX_n = EX_0$. Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas, y demostrarlos.

8) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces para todo $m, n \geq 0$ tenemos $E(X_{n+m}|\mathcal{A}_n) = X_n$. Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas, y demostrarlos.

9) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces para todo $n \geq 0$ tenemos que $\sigma(X_0, \ldots, X_n) \subset \mathcal{A}_n$, y X es una martingala adaptada a $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Aquí $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ denota la σ-álgebra más pequeña que hace que todas las funciones $X_0, \ldots, X_n$ sean medibles.

10) Probar que si T_1, T_2 son tiempos de parada con respecto a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, entonces T_1+T_2, $\max\{T_1, T_2\}$ y $\min\{T_1, T_2\}$ son tiempos de parada con respecto a $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$.

11) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^\infty$ es una submartingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, y T_1, T_2 son tiempos de parada acotados, digamos, por $m \in \mathbb{N}$, y tales que $T_1 \leq T_2$, entonces $EX_0 \leq EX_{T_1} \leq EX_{T_2} \leq EX_m$.

12) Demostrar que si $X := \{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso uniformemente integrable, entonces $\|X\|_1 := \sup_{t\in T} \|X_t\|_1 < \infty$.

13) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala, y $1 \leq r \leq s \leq \infty$, entonces $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, donde $\|X\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p$.