Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Estos problemas son básicamente un repaso o recordatorio de cursos anteriores.

1) Decimos que la sucesión de v.a. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en media de orden $p > 0$ a la v.a. X (en el caso particular $p = 2$ decimos que hay convergancia en media cuadrática) si

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

cuando $p < \infty$, y

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ess\,sup} |X_n - X| = 0$$

cuando $p = \infty$.

a) Probar que para todo par s, p tal que $0 < s < p \leq \infty$, se cumple $\|X\|_s \leq \|X\|_p$ (sugerencia: usar Jensen o Hölder). Concluir que la convergencia en media de orden p implica convergencia en media de orden s para todo $0 < s < p$, y además implica convergencia en probabilidad.

b) Los recíprocos no son ciertos; proporcionar contraejemplos.

2) Estudiar para $\alpha > 0$ la convergencia en media cuadrática de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, sabiendo que

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

3) Dada la informacion $E[X] = 7$ y $\mathrm{Var}(X) = 9$, usar la desigualdad de Chebyshev-Markov para acotar inferiormente $P(4 \leq X \leq 10)$. Con las mismas hipótesis, hallar los valores máximo y mínimo que puede tomar $P(4 < X < 10)$.

4) Determinar si para toda $\mu \geq 0$, toda $\sigma \geq 0$, y toda $c > \sigma$, existe una v.a. X con media μ y desviación típica σ tal que

$$P(|X - \mu| \geq c) = \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

Más adelante veremos desigualdades maximales, que en cierto sentido mejoran la desigualdad de Chebyshev-Markov.

5) Lanzamos un dado equilibrado con 6 caras, y a continuación lanzamos una moneda equilibrada tantas veces como señale el dado. Sea X el número de caras obtenido. Calcular $E[X]$ y $\mathrm{Var}(X)$. Comentario-sugerencia: puede que sea más fácil hallar la esperanza y la varianza condicionales primero. Buscad la definición de la varianza condicional si no la habeis visto antes, y la regla de la varianza total.

6) Este problema es más o menos igual que el anterior. Lanzamos una moneda lastrada, con probabilidad de sacar cara igual a 3/5. Si sale cara lanzamos un dado equilibrado con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y si sale cruz lanzamos un dado equilibrado con seis caras numeradas del 1 al 6. Sea Y el número obtenido. Denotando $X = 1$ si sale cara, $X = 0$ si sale cruz, hallar 1) $E(Y|X)$, 2) $E(Y)$, 3) $\mathrm{Var}(E(Y|X))$, 4) $\mathrm{Var}(Y|X)$, 5) $\mathrm{Var}(Y)$.

7) Dadas tres variables aleatorias X, Y, Z y una función de Borel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, probar las siguientes afirmaciones:

a) $E[Y\ g(X)\ |X] = g(X)\ E[Y|X]$.

b) $E[E[Y|X,Z]\ |X] = E[Y|X] = E[E[Y|X]\ |X,Z]$.

8) Dadas dos variables aleatorias X e Y con media cero, demostrar las siguientes afirmaciones:

a) X y $E[X|Y]$ tienen correlación positiva.

b) El coeficiente de correlación de Y y $E[X|Y]$ tiene el mismo signo que el de X y Y.

9) Demostrar la positividad de la esperanza condicional, es decir, si $X \geq 0$ c.s., entonces $E(Y|X) \geq 0$ c.s..

10) Demostrar la versión condicional de la desigualdad de Jensen.

11) Demostrar la siguiente versión condicional de Chebyshev: Si $a > 0$, entonces

$$P(|X| \geq a|\mathcal{B}) \leq E\left(\frac{X^2}{a^2}|\mathcal{B}\right).$$