1) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces para todo $n > 0$ tenemos $EX_n = EX_0$. Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas, y demostrarlos.

2) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces para todo $m, n \geq 0$ tenemos $E(X_{n+m}|\mathcal{A}_n) = X_n$. Enunciar los resultados análogos para sub y supermartingalas, y demostrarlos.

3) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces para todo $n \geq 0$ tenemos que $\sigma(X_0, \ldots, X_n) \subset \mathcal{A}_n$, y X es una martingala adaptada a $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Aquí $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ denota la σ-álgebra más pequeña que hace que todas las funciones $X_0, \ldots, X_n$ sean medibles.

4) Probar que si T_1, T_2 son tiempos de parada con respecto a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces $T_1 + T_2$, $\max\{T_1, T_2\}$ y $\min\{T_1, T_2\}$ son tiempos de parada con respecto a $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

5) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala adaptada a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$, y T_1, T_2 son tiempos de parada acotados, digamos, por $m \in \mathbb{N}$, y tales que $T_1 \leq T_2$, entonces $EX_0 \leq EX_{T_1} \leq EX_{T_2} \leq EX_m$.

6) Demostrar que si $X := \{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso uniformemente integrable, entonces $\|X\|_1 := \sup_{t \in T} \|X_t\|_1 < \infty$.

7) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala, y $1 \leq r \leq s \leq \infty$, entonces $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, donde $\|X\|_p := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_p$.

8) Sea B_n el operador de Bernstein en $C[0,1]$. Usar la desigualdad de Hoeffding para probar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces $\|f - B_n f\|_\infty \leq O\left(\sqrt{n^{-1} \log n}\right)$.