Las soluciones dadas a continuación no son las únicas posibles. Por ejemplo, ~~vas~~ modelos discretos o continuos en 1 pueden ser aceptables.

1) a) (4 puntos) Una población se divide en I individuos infectados por una enfermedad vírica y S individuos no infectados pero susceptibles de serlo. La suma $I + S = N$ se supone constante. La infección es crónica, no tiene sintomas externos y se transmite por contagio. La tasa de crecimiento es proporcional con constante c al número de encuentros entre infecciosos y susceptibles. Formula un modelo de esta situación y predice que pasará a largo plazo. Matemáticamente es equivalente usar I, S con $I+S=N$ cte, como las normalizaciones I/N, S/N. Sin normalizar, $\frac{dI}{dt} = cIS = cI(N-I) =$

$= cNI\left(1-\frac{I}{N}\right)$. Ec. logística. $I(t) \longrightarrow N$ cuando $t \to \infty$.

- Proporciones $x' = \tilde{c}x(1-x)$ donde $\tilde{c} = cN$
  $x' = cx(1-x)$ también O.K

b) Se descubre un antiviral y los individuos afectados dejan de estarlo a un ritmo constante r por unidad de tiempo (sin embargo, pueden infectarse otra vez). Expresar en función de r y c que tanto por ciento de la población se verá infectado a largo plazo.

$\frac{dI}{dt} = cIS - rI = I\left(cN\left(1-\frac{I}{N}\right)-r\right) = 0 \iff \frac{I}{N} = 1 - \frac{r}{cN}$.

Punto atractor, ya que si $\frac{I}{N} > 1 - \frac{r}{cN}$, $\frac{dI}{dt} < 0$, mientras que si $\frac{I}{N} < 1 - \frac{r}{cN}$, $\frac{dI}{dt} > 0$ en ese punto.

Versión Normalizada: $x_f = 1 - \frac{r}{c}$ O.K

c) Supón que los individuos curados adquieren inmunidad (y que nadie muere). Formula un modelo que describa la evolución de esta nueva situación. Determinar, en función de las constantes de proporcionalidad y de recuperación, que proporción de infectados tiene que haber cuando se empieza a aplicar el antiviral, para que su número no aumente. Asumimos que antes de la aplicación del antiviral no hay ninguna persona inmune. R = recuperados, $R_0 = 0$, $I+S+R=N$.

Queremos $0 \geq \frac{dI}{dt} = cIS - rI = (c(N-I-R)-r)I$. En $t=0$,

$R_0 = 0$, $I_0 > 0$, $c(N-I_0)-r \leq 0 \iff \frac{I_0}{N} \geq 1 - \frac{r}{cN}$.

Observa que $S(t) = N - I(t) - R(t) \leq S_0$ al ser decreciente:

$\frac{dS}{dt} = -cIS < 0$. Por tanto, $0 \geq \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = (cS_0 - r)I_0 \Rightarrow 0 \geq \frac{dI}{dt} = (\underbrace{cS-r}_{\leq 0})I$

(Alternativamente Fichero en la Página Web)

2) a) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Si $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cadena de Markov finita y $W_n := X_{10n}$, entonces $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cadena de Markov.

V. Cada CM define una matriz estocástica P (de transición) y viceversa, si el conjunto de estados es finito. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, P^{10} es la matriz de transición de $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$, luego esta es una CM.

b) (2 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Sea P una matriz estocástica 4×4, cuyas entradas son todas estrictamente positivas. Entonces P define una cadena de Markov irreducible y aperiódica. V. Irreducible ya que $i \to j$ para cualquier par de estados i, j. Aperiódica ya que $P_{ii} = P_{ii}(1) > 0$

c) Un matrimonio heterosexual decide producir bebes hasta tener dos hijas. Determinar el número esperado de descendientes de dicho matrimonio. Las hipótesis son las habituales: igual probabilidad de tener hijo e hija, e independencia entre gestaciones distintas. Análisis del primer paso. $h(i)$ = nº esperado de descendientes adicionales hasta alcanzar 2 hijas, cuando empezamos con i hijas. $h(2) = 0$, $h(1) = 1 + \frac{1}{2}h(1) + \frac{1}{2}h(2)$, $h(1) = 2$, $h(0) = 1 + \frac{1}{2}h(0) + \frac{1}{2}h(1) = 2 + \frac{1}{2}h(0)$, $\boxed{h(0) = 4}$

3) a) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existe un grafo plano con 10 nodos, 8 aristas y 1 cara. V. Dos ejemplos: 1)  , 2) 
Comentario: Por la fórmula de Euler, ningún ejemplo puede ser conexo. En particular, ningún árbol satisface la condición.

b) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existe un grafo con 125 nodos, tal que el grado de todos los nodos es 25. No existe: la suma de los grados es par (el doble de las aristas), y $125 \times 25 = 5^5$ es impar.

c) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existe un árbol con 125 nodos y 155 aristas. No existe. Un árbol con $|V|$ vertices tiene $|V|-1$ aristas.

d) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: los grafos (V, A_1) y (V, A_2) con el mismo conjunto de vertices $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y aristas $A_1 = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}\}$, $A_2 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$, son isomorfos.

Verdadera: la biyección $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 4$, $\phi(4) = 3$ (por ejemplo) preserva todas las aristas:

$\{\phi(1), \phi(2)\} = \{1, 2\} \in A_2$, $\{\phi(2), \phi(3)\} = \{2, 4\} \in A_2$

$\{\phi(3), \phi(4)\} = \{4, 3\} \in A_2$, $\{\phi(4), \phi(1)\} = \{3, 1\} \in A_2$.