

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Decidir razonadamente significa “justificar brevemente, indicando teoremas usados, definiciones, etc”. Duración máxima del examen: 3 horas.

- 1) a) (15 puntos) Determinar la evolución del sistema dinámico

$$x' = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$$

dada una condición inicial x_0 arbitraria.

- b) (25 puntos) Hallar las soluciones de equilibrio en el siguiente modelo discreto de población, en el que todos los parámetros se asumen positivos:

$$x_{n+1} = x_n \left[1 + r \left(1 - \frac{x_n}{K} \right) \right].$$

Determinar la estabilidad local de las soluciones de equilibrio, así como el primer valor del parámetro r para el que se produce una transición (o bifurcación) en la conducta de la población.

- 2) a) (5 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una cadena de Markov irreducible, finita y periódica. Entonces, dada cualquier distribución inicial para X_0 , la distribución límite existe y coincide con la distribución invariante.

- b) (5 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una cadena de Markov irreducible, finita y periódica. Entonces los tiempos medios de retorno a cada estado se encuentran determinados por la distribución estacionaria.

- c) (20 puntos) Se sabe que cierta enfermedad, en los machos de una especie con generaciones disjuntas, depende en parte de factores hereditarios. Nuevas pruebas diagnosticas revelan que la probabilidad de que un individuo esté enfermo depende de si lo estaban tanto su padre como su abuelo. Estudios estadísticos dan las siguientes relaciones:

- i) Si el padre y el abuelo de un individuo padecieron la enfermedad, él la padecerá con probabilidad 0.8.
- ii) Si el padre la padeció pero el abuelo no, el individuo la padecerá con probabilidad 0.6.
- iii) Si el padre esta sano pero el abuelo no, el individuo la padecerá con probabilidad 0.4.
- iv) Si ninguno sufrió la enfermedad, el individuo la padecerá con probabilidad 0.1.

A largo plazo, ¿que tanto por ciento de individuos estarán enfermos?

- 3) Sea $Q_n = (V, A)$ el grafo “retículo” definido por la siguiente relación $V = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in \{0, 1\}\}$, y $\{xy\} \in A \iff x - y = e_i$, donde los e_i son los vectores de la base canónica}. Es decir, Q_n es el grafo constituido por los vértices y las aristas del cubo n -dimensional $[0, 1]^n$.

- a) (6 puntos) Decidir razonadamente si existen ciclos Eulerianos y Hamiltonianos en Q_2 .

- b) (8 puntos) Decidir razonadamente si existen ciclos Eulerianos en Q_3 y en Q_4 .

- c) (8 puntos) Decidir razonadamente si Q_n es bipartito.

- d) (8 puntos) Sea $G = (V, A)$ un grafo en el que $4|A| > |V|^2$, donde $|A|$ y $|V|$ denotan respectivamente el número de aristas y de vértices. Demostrar que no puede ser bipartito. Sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito que cumple $4|A| = |V|^2$. Identificar dicho grafo, justificando la respuesta.