

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

DURACION MAXIMA DEL EXAMEN: 3 horas.

1) a) (4 puntos) Una población se divide en  $I$  individuos infectados por una enfermedad vírica y  $S$  individuos no infectados pero susceptibles de serlo. La suma  $I + S = N$  se supone constante. La infección es crónica, no tiene síntomas externos y se transmite por contagio. La tasa de crecimiento es proporcional con constante  $c$  al número de encuentros entre infecciosos y susceptibles. Formula un modelo de esta situación y predice que pasará a largo plazo.

b) (2 puntos) Se descubre un antiviral y los individuos afectados dejan de estarlo a un ritmo constante  $r$  por unidad de tiempo (sin embargo, pueden infectarse otra vez). Expresar en función de  $r$  y  $c$  que tanto por ciento de la población se verá infectado a largo plazo.

c) (4 puntos) Supón que los individuos curados adquieren inmunidad (y que nadie muere). Formula un modelo que describa la evolución de esta nueva situación. Determinar, en función de las constantes de proporcionalidad y de recuperación, que proporción de infectados tiene que haber cuando se empieza a aplicar el antiviral, para que su número no aumente. Asumimos que antes de la aplicación del antiviral no hay ninguna persona inmune.

2) a) (2 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Si  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una cadena de Markov finita y  $W_n := X_{10n}$ , entonces  $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una cadena de Markov.

b) (2 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Sea  $P$  una matriz estocástica  $4 \times 4$ , cuyas entradas son todas estrictamente positivas. Entonces  $P$  define una cadena de Markov irreducible y aperiódica.

c) (6 puntos) Un matrimonio heterosexual decide producir bebés hasta tener dos hijas. Determinar el número esperado de descendientes de dicho matrimonio. Las hipótesis son las habituales: igual probabilidad de tener hijo e hija, e independencia entre gestaciones distintas.

3) a) (2 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existe un grafo plano con 10 nodos, 8 aristas y 1 cara.

b) (2 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existe un grafo con 125 nodos, tal que el grado de todos los nodos es 25.

c) (2 puntos) b) (2 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existe un árbol con 125 nodos y 155 aristas.

d) (4 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: los grafos  $(V, A_1)$  y  $(V, A_2)$  con el mismo conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y aristas  $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$ ,  $A_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ , son isomorfos.