1) Determinar la evolución de los siguientes sistemas dinámicos dada una condición inicial x_0:

a) $x' = 15 - 8x + x^2$.

b) $x' = 9 - 6x + x^2$.

c) $x' = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$.

d) $x' = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$.
Considerar todas las condiciones iniciales posibles.

2) Crecimiento en pesqueria con captura I. La evolución de la población de peces con captura viene dada por la ecuación logística

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Si la población se ve sometida a una explotación pesquera que produce h toneladas por unidad de tiempo la ecuación se transforma en

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(t).$$

Supongamos primero que h constante.

a) Demostrar que si la captura es menor que una cierta cantidad h_{max}, entonce existe una única cantidad de reserva que da lugar a un equilibrio sostenible x_e. Hallar h_{max}. Interpretar el significado de sostenibilidad y relacionar dicho significado con los posibles puntos de equilibrio y su estabilidad.

b) ¿Que ocurré con x_e cuando $h < h_{max}$ aumenta? ¿Y si $h > h_{max}$?

c) Teóricamente, ¿qué reserva de equilibrio permite la captura máxima? ¿Que riesgo conlleva permitir una captura muy cercana a la máxima? ¿Que quiere decir el otro punto de equilibrio?

3) Crecimiento en pesqueria con captura II. Modelo de Schaeffer. Los modelos de explotación pesquera como el anterior ignoran el hecho de que la captura es una actividad humana cuyos resultados dependen de los factores productivos invertidos y de la cantidad existente de peces. Séa E la variable "esfuerzo pesquero" (número de barcos por dia). Suponemos que la captura es proporcional a dicho esfuerzo pesquero y a la cantidad de peces existente.

a) Escribir una ecuación diferencial autónoma para explicar la evolución de la población de peces, suponiendo el esfuerzo pesquero constante.

b) Representar en una misma gráfica la ley de crecimiento endogena (en ausencia de capturas) la ley de evolución de las capturas. Demostrar que si el esfuerzo pesquero crece por encima de un cierto nivel E_{max} la población se extinguirá independientemente de las condiciones iniciales.

c) Prueba que la reserva de equilibrio es una función decreciente del esfuerzo pesquero. ¿Cual es el esfuerzo pesquero que garantiza una captura máxima de equilibrio?

d) Dar una formula para la captura en equilibrio, empleando el esfuerzo pesquero E, y discutir como evoluciona en términos de E. El patrón de los barcos afirma que cuantos más barcos mas capturas. Usar los modelos para convencerle de que ello sólo puede ser así a corto plazo. Indicar el esfuerzo pesquero que maximiza las capturas (evidencia empírica: La gamba del mediterraneo).

4) Modelo de Solow: Generalización
El Modelo de crecimiento económico de Solow visto en clase se basaba en la función de producción de Cobb-Douglas. En los modelos económicos mas generales, la dinámica de crecimiento de la economia viene gobernada por una ecuación similar

$$k' = sf(k) - (\mu + \delta)k,$$

donde k es el capital, f la productividad, $0 < s < 1$ la proporción de la producción invertida en mejorar el capital, δ la tasa de depreciación del capital por unidad de tiempo y μ es la tasa de crecimiento de la población.
La productividad f es desconocida pero satisface las siguientes propiedades

i) $f(0) = 0$

ii) f es creciente y concava para todo $k > 0$

iii) $sf'(0) - (\mu + \delta) > 0$

iv $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$

a) Encuentra los equilibrios de esta economía. Demuestra que existe un unico equilibrio $k_e > 0$ (*Intensidad de capital de equilibrio*). ¿Que ocurrirá con el tiempo si $k(0) = k_0$ con $0 < k_0 < k_e$? ¿Y $k_0 > k_e$? ¿Y si $k_0 = 0$?

b) ¿Como influye la tasa de crecimiento de la población en el valor del capital en equilibrio? ¿Y la tasa de depreciación?

c) El consumo per capita viene dado por $f(k) - I$ donde $f(k)$ es lo que produces e I es lo que inviertes $sf(k) - (\mu + \delta)k$[1].¿ Para que valor de k se hace máximo el consumo per capita en terminos de la producción marginal f'?

d) Supón ahora que hay un avance técnológico. En la ecuación de evolución lo representamos por

$$k' = sAf(k) - (\mu + \delta)k,$$

donde $A > 1$ ¿Como varía el equilibrio?

5) Se ha observado que una población se duplicó al cabo de 8 horas.

a) Si estuviera creciendo con tasa de crecimiento constante γ ¿cuál sería el valor de γ?

b) Si al cabo de 15 horas se ha triplicado (respecto de su valor inicial P_0), ¿podemos seguir creyendo que la tasa es constante?

c) Si suponemos en cambio que el crecimiento es logístico, ¿cuál sería la población de equilibrio L en términos de P_0 ?

6) Se considera una reacción nuclear en cadena en la cual la tasa de cambio (x') del numero de moléculas es proporcional al número de encuentros entre ellas pero la tasa de mortalidad (pierden actividad) es constante $\alpha > 0$. Encuentra una ecuación diferencial que describa el comportamiento de las soluciones positivas.

a) ¿A que tendría sentido llamar valor crítico?

b) ¿Están las soluciones definidas en todo tiempo?

c) Dar condiciones para un sistema autónomo general que garanticen la existencia de una explosión (es decir, las soluciones no están definidas para todo tiempo t).

7) Un grupo de ecólogos nos piden estimaciones cualitativas de la tasa de crecimiento $\frac{x'}{x} = r(x)$, para diversas poblaciones, a partir de ciertas observaciones empíricas (modelo continuo).

i) Observan dos equilibrios estables consecutivos $0 < x_0 < x_1$.

[1] la tasa de crecimiento de k

ii) Observan que las poblaciones tienden a extinguirse cuando la densidad es menor que x_0, la velocidad de reproducción maxima se alcanza cuando la población es x_1 y además a largo plazo si las poblaciones no se extinguen tienden a x_2.

iii) Observan que la población crece exponencialemente cerca de cero, se reproduce velozmente cerca de x_1 pero después inexplicablemente se reproduce de manera muy lenta. Cerca de un valor x_2 observan que a veces la población tienden a estabilizarse y otras crece rapidamente hacia un valor mayor x_3. Aunque comiencen con poblaciones muy altas, a la larga siempre observan valores que no exceden x_3.

8) Para $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (c-x)x$ con $1 < c < 4$ se considera el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ para $k \geq 0$ con x_0 dado.

a) Comprobar que 0 y $c-1$ son los únicos puntos fijos de f.

b) Comprobar que tanto si $x_0 = 0$ como si $x_0 = c$ entonces $x_k = 0$ para $k \geq 1$.

c) Demostrar que tanto si $x_0 < 0$ como si $x_0 > c$ entonces $x_k \to -\infty$ cuando $k \to \infty$.

d) Demostrar que si $1 < c \leq 2$ entonces $x_k \to c-1$ si $0 < x_0 < c$.
Nota: $c = 2$ corresponde a $c - 1 = \frac{c}{2}$.

e) ¿Qué condiciones sobre c se tienen que cumplir para que el sistema dinámico tenga un ciclo de orden 2?
Nota: $x_0 \neq x_1 \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0) \neq x_2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1) = x_0$ es un ciclo de orden 2. Observar que en ese caso x_k no converge.

f) (*) ¿Es cierto para algún $c > 2$ que dado x_0 cualquiera con $0 < x_0 < c$ se tiene que $x_k \to c - 1$? ¿Y para $c > 3$?

9) Dada la ecuación

$$x' = x(1-x) + f(t)$$

con $f(t) = 0.5\text{sen}(t)$, demostrar la acotación de las soluciones cuando t tiende a infinito. (Sugerencia: Considerar la familia de funciones tales que v_c $v_c'(t) = f$. Se puede probar que la trayectorias de v_c actúan como vallas. Supón que una trayectoria $x(t)$ corta un conjunto de nivel de v y analiza el signo de $(x-v)'$)

10) Estudiar la dinámica de una población dada por la recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde f es una función monótona (es decir, no decreciente o no creciente).

a) ¿ Pueden existir órbitas periódicas?

b) Discutir el comportamiento de las orbitas en función de los puntos de equilibro de f.

c) Una ecuación diferencial se puede entender como el límite de una sucesión de ecuaciones en diferencias. ¿Porqué no aparecen orbitas periódicas?

11) La Walt Disney Corporation obtuvo los siguientes beneficios netos en los años que se indican: 1984-25 (millones de dolares) 86-225, 88-525, 90-825, 92-820. Predecir (o retrodecir) los beneficios netos de Walt Disney Co. en el año 1987.
Sugerencia: usar la recta de regresión para esos datos. Comentario: de hecho, Walt Disney Co. obtuvo 380 millones de beneficios netos.

12) Considerar la función tienda

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x) & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Investigar que puntos tienden a infinito.

b) Investigar que puntos permanecen acotados y que les ocurre. Denominamos a este conjunto C. Sea $N(r)$ el número de intervalos de longitud r necesario para cubrir C y sea

$$\dim(C) = \lim_{r \to 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)}.$$

Asumiendo que el límite existe, demostrar que $\dim(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$. Probar sin embargo que el segmento $[0,1]$ tiene dimensión uno.

13) Li y Yorke probaron que dada una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$, si existe $a \in [0,1]$ tal que $a < f(a) < f^2(a)$ y $f^3(a) \leq a$, entonces el sistema dinámico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ exhibe una conducta caótica. Verifica que dicha condición se cumple para $f(x) = 4x(1-x)$. ¿Qué ocurrirá para valores cercanos a 4?

a) Extraer consecuencias sobre el sistema dinámico $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$, con μ cercano a 4 a partir de la respuesta anterior.

b) Hacer lo propio con la función tienda del ejercicio anterior.

14) Los siguientes modelos han sido utilizados en la literatura ecológica para estudiar situaciones reales. Todos los parámetros se asumen positivos. Hallar las soluciones de equilibrio, determinando su estabilidad local (mediante linealización), así como los primeros valores de bifurcación de los parametros.

a)

$$x_{n+1} = x_n \left[1 + r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right].$$

b)

$$x_{n+1} = x_n \exp\left[r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right].$$

15) Analiza la estabilidad del siguiente sistema para distintos valores de μ.

$$\begin{cases} x' = y + \mu x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \mu y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

16) Modelo de epidemiologia (SIR).

Dividimos una población **constante** en tres grupos: los susceptibles S, individuos que pueden infectarse, los infecciosos (I), que padecen la enfermedad y pueden transmitirla, y los recuperados (R), individuos ya restablecidos de la enfermedad e inmunes a ella (asumimos que nadie muere, o alternativamente, incluimos a los muertos en la clase R de recuperados-removidos). Se consideran las siguientes premisas

1. La enfermedad se transmite por contagio. La probabilidad de infectarse es proporcional al numero de encuentros entre susceptibles e infectados (la constante de proporcionalidad r depende del virus y de otros factores).

2. Los infecciosos abandonan su clase con una tasa per capita γ.

3. El periodo de incubación es suficientemente pequeño como para no tomarse en cuenta.

a) Plantea un sistema de dos ecuaciones para modelizar la evolución de $S(t)$ e $I(t)$.

b) Calcula una integral primera del sistema [2].

c) Decimos que la epidemia se propaga si el número de infectados aumenta en algun momento. Prueba el teorema del umbral de Kermack y McKendrick: La epidemia se propaga el número de si y solo si el numero de susceptibles inicial es mayor que un umbral S_c.

d) Sean S_0, I_0 el número de susceptibles e infectados a dia de hoy. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de evitar la enfermedad? [3]

17) Considera el sistema de recurrencias dado por

$$X(n+1) = AX(n)$$

donde $A \in \mathcal{M}^{2\times 2}(\mathcal{R})$. Analiza el plano de fases en términos de la traza de A y su determinante, de manera análoga al caso de las ecuaciones diferenciales.

18) Investiga la dinámica a largo plazo del sistema de recurrencias

$$X(n+1) = AX(n)$$

si $A \in \mathcal{M}^{d\times d}(\mathcal{R})$ es una matriz diagonalizable con autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ tal que $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ para $i \neq 1$.

19) Cierto país está dividido en tres zonas demográficas: interior, costa e islas. Se sabe que cada año un 5% de la población del interior emigra a la costa y otro 5% a las islas. De los residentes en la costa un 10% se muda al interior y un 5% a las islas. Por último, entre los isleños un 15% emigra al interior y un 10% a la costa.

a) Formula un sistema dinámico **discreto** y estima el porcentaje de población que residirá en cada región a largo plazo. ¿Cuánto tiempo aproximadamente tardará en alcanzarse el equilibrio?

b) Por motivos estratégicos, el gobierno desea que al menos un 25% de la población resida en las islas. Para ello limita la emigración de isleños a un porcentaje fijo α cada año. Sabiendo que entre los emigrantes isleños el 60% escoge destinos del interior, ¿cuál debe ser el valor de α para que se cumplan los deseos del gobierno?

20) La empresa *Patagonia-Visión* tiene un barco con el que realiza un recorrido diario con el fin de que los turistas puedan avistar ballenas. Se sabe que si hoy se consigue algún avistamiento, la probabilidad de conseguirlo mañana es del 60% y que, si no se consigue ningún avistamiento hoy, la probabilidad de no hacerlo tampoco mañana es del 70%.

a) Dibujar (y escribirlo después en forma matricial) un diagrama de estados que exprese la probabilidad de ver y de no ver ballenas un día cualquiera en función de las probabilidades de verlas y de no verlas el día anterior.

b) Calcular los autovalores de la matriz de transición.

c) ¿Cual es la probabilidad a largo plazo de avistar ballenas un día cualquiera?

21) Un grupo ecologista quiere realizar un estudio sobre cierta población de aves en la Reserva Natural de Clavijo para saber si se encuentra en peligro de extinción. Se sabe que un 16% de las nacidas en un año pasan a adultas al año siguiente, que un 56% de las adultas sobreviven al año

[2] Esencialmente, una función constante a lo largo de las trayectorias que no es localmente constante en ningún punto.

[3] Debes estudiar el comportamiento a largo plazo del sistema.

siguiente y que cada hembra produce cuatro crias cada año. Sabemos que la población tiene el mismo número de machos que de hembras.

a) Dibujar el diagrama de estados y escribirlo en forma matricial.

b) Determinar en qué tanto por ciento crecerá o decrecerá la población a largo plazo.

c) Calcular cuál será la proporción de individuos jóvenes y maduros sobre el total (también a largo plazo).

d) ¿Cuál debe ser la tasa de supervivencia de las jóvenes para que la población se mantenga estable?

22) Una matriz de Leslie es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(donde } s_j > 0 \text{ y } b_j \geq 0 \ \forall\, j, \text{ y } \exists\, j_0 : \ b_{j_0} > 0).$$

Demostrar por inducción que el polinomio característico satisface

$$\det(A - \lambda I) \ = \ \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2 s_1 \lambda^{n-2} - b_3 s_1 s_2 \lambda^{n-3} - \ldots - b_n s_1 \cdots s_{n-1}.$$

Probar que la función

$$q(\lambda) \ = \ \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2 s_1}{\lambda^2} + \frac{b_3 s_1 s_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{b_n s_1 \cdots s_{n-1}}{\lambda^n}$$

es estrictamente decreciente y por tanto una biyección de $(0, \infty)$ en sí mismo, y además $q(\lambda) = 1$ si y sólo si $p(\lambda) = 0$. Deducir que A tiene un único autovalor positivo, y que además debe ser simple. Ademas prueba que cualquier otro autovalor μ satisface

$$|\mu| \leq \lambda$$

23) Considera una matriz de Leslie de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

con $b > 0$ y $s_1, s_2 \in (0, 1]$. Identifica para que parámetros crece la población y para cuales se extingue y para que parametros la población oscila.