1) Sea G un grafo bipartito, dividido en las clases A y B. Probar que si todo vértice tiene el mismo grado $g \geq 1$, entonces $|A| = |B|$. Sugerencia: contar aristas.

2) Probar que si en un grafo bipartito G todo nodo tiene el mismo grado $g \geq 1$, entonces G contiene un emparejamiento perfecto. Sugerencia: Usar el Teorema de los Matrimonios de Hall.

3) Sea G un grafo en el que $4|A| > |V|^2$. Demostrar que G no puede ser bipartito. Si un grafo bipartito cumple $4|A| = |V|^2$ ¿qué grafo es?

4) Usar la formula de Euler para probar que si G es un grafo plano con ciclos, tal que el ciclo más corto tiene al menos k aristas, entonces $|A|(k-2) \leq k(|V|-2)$.

5) Dadas tres casas y tres pozos, decidir razonadamente si es posible conectar cada casa directamente con cada uno de los tres pozos, sin que los caminos se entrecuzen.

6) Probar que si G es un grafo plano bipartito con n nodos, entonces $|A| \leq 2n-4$. Comentario: Este problema es un caso especial de un ejercicio anterior, y el caso general de otro.

7) ¿Existen circuitos hamiltonianos en $K_{r,s}$, el grafo bipartito completo con r y s nodos?

8) ¿Es posible mover un caballo de ajedrez de la casilla 1×1 a la 8×8 pasando exactamente una vez por cada casilla del tablero?

9) Variación del anterior: un raton se quiere comer un cubo de queso de $3 \times 3 \times 3$ cm. Como es un ratón muy ordenado, empieza por una esquina y se come un cubo de 1 cm^3, antes de pasar a otro de entre los que comparten lado con el anterior. ¿Puede el ratón seguir ese sistema y terminar en el cubo central? Sugerencia: Colorear el queso como si fuera un tablero de ajedrez.

10) Sea G un grafo bipartito en el que cada clase tiene n nodos, y cada nodo, grado estríctamente mayor que $n/2$ ¿Existe necesariamente un emparejamiento perfecto?

11) Si borramos una arista de K_5, ¿es el subgrafo resultante planar?

12) Sea G el ciclo con 6 nodos. ¿Es su complementario planar?

13) Sea G un grafo conexo tal que todos los nodos excepto quizá uno, tienen grado $\leq d$. Probar que G es $d+1$-coloreable.

14) Sea G un grafo plano tal que todas las caras tienen bordes con un número par de aristas. Hallar el valor más pequeño de d tal que G es d-coloreable.