1) En este problema consideramos grafos no etiquetados, salvo que explicitamente se diga otra cosa.

a) Encontrar todos los grafos con $n = 2, 3, 4$ vértices.

b) ¿Existe un grafo con 6 vértices cuyos grados son $2, 3, 3, 3, 3, 3$?

c) ¿Existe un grafo con 6 vértices cuyos grados son $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

d) ¿Cuantos grafos hay con 4 vértices cuyos grados son $1, 1, 2, 2$?

e) ¿Cuantos grafos hay con 10 vértices cuyos grados son todos igual a 1?

f) ¿Cual es el número máximo de aristas que un grafo con 10 vértices puede tener?

g) ¿Cuantos grafos etiquetados hay con 20 vértices?

h) ¿Cuantos subgrafos tiene un triangulo?

i) ¿Cuantos subgrafos tiene un grafo con n vértices y sin aristas?

2) Probar o refutar: En un grupo de $n \geq 2$ personas, hay dos con el mismo número de conocidos. Sugerencia: Plantear el problema en términos de grafos.

3) Encontrar un grafo cuyos vértices tienen todos grado 3. Si añadimos la condición de que $|V|$ sea impar, ¿existe tal grafo?

4) Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices. Su *grafo complementario* $G^c = (V', A')$ tiene los mismos vértices que G y sus aristas son precisamente las que le faltan a G para ser completo. Es decir,

$$V' \stackrel{\text{def}}{=} V \quad \text{y} \quad A' \stackrel{\text{def}}{=} A(K_n) \setminus A,$$

donde $A(F)$ denota las aristas del grafo F, y K_n es el grafo completo con n vértices (y por tanto, $n(n-1)/2$ aristas).

a) Demostrar que $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son isomorfos si y sólo si lo son sus complementarios.

b) Encontrar un grafo con cinco vértices que sea isomorfo a su complementario, indicando un isomorfismo de manera explícita.

c) ¿Existe un grafo con 3 vértices que sea isomorfo a su complementario? ¿y con 6 vértices? Sugerencia: contar aristas.

5) Si G es un grafo de 17 aristas en el que todos los vértices tienen grado superior o igual a 3, ¿cuántos vértices puede tener G como máximo?

6) Sea k un número entero positivo y sea G un grafo en el que todo vértice tiene grado superior o igual a k. Demostrar que G contiene un camino de longitud k.

7) Sea G un grafo con $|V| = n \geq 2$ vértices y $|A| > \binom{n-1}{2}$ aristas. Demostrar que G es conexo.

8) Probar que el grafo G es un árbol si y sólo si es máximamente acíclico. Es decir, G no contiene ciclos, pero añadir cualquier arista genera un ciclo.

9) Probar que el grafo G es un árbol si y sólo si cada par de vértices está conectado de modo *único* por un camino.

10) Sea G un grafo conexo con $|V| = n \geq 2$ vértices. Probar que existe un vértice tal que el subgrafo obtenido al eliminar dicho vértice, así como todas las aristas incidentes a él, es conexo.