1) Una moneda se lanza sucesivamente hasta que aparecen dos caras consecutivas. Calcular el numero medio de tiradas hasta la primera ocurrencia. Considerar posibles variaciones (cruz cruz, cruz cara, cara cruz).

2) Cadena del jugador. En cada tirada un jugador apuesta 1 Euro, con probabilidad p gana otro euro y con probabilidad $1-p$ lo pierde. Cuando llega a d euros deja la mesa de juego. Si dispone de un capital inicial de j euros ¿que probabilidad tiene de ganar los d euros?

3) Modelo de fecundidad simplificado. La población de mujeres de un cierto país se divide en 6 clases. E_0 : Prepubertad, E_1 : Solteras, E_2 : casadas, E_3: divorciadas, E_4 : Viudas, E_5 : *Abs*. El último estado engloba esteriles, fallecidas y emigradas. Se considera que las mujeres son fértiles en el estado 2, casadas y se quiere saber en media cuanto tiempo pasan en ese estado. Usando métodos estadísticos se llega a la siguiente matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular cuanto tiempo en media pasa cada mujer en el estado 2.

4) En una licenciatura de 4 años, cierto estudiante tiene, cada año, una probabilidad p de aprobar el curso, r de repetir y q de abandonar la carrera.
Modelizar la evolución del estudiante con una cadena de Márkov con estados $\{A, 1, 2, 3, 4, L\}$, donde A =abandono y L =licenciado.
(a) Dar una expresión de la matriz de transición y esbozar el grafo correspondiente, indicando los distintos tipos de estados.

(b) Para un alumno con $p = 0'7$, $r = 0'2$, $q = 0'1$, hallar la probabilidad de licenciarse. ¿Cuál será la probabilidad de abandono?

(c) Para este mismo alumno, hallar el tiempo medio que pasará en 2º curso, y el tiempo medio que pasará en la universidad.

5) Tres personas juegan de la siguiente forma: cada uno elige una de las tres secuencias $011, 101, 110$. A continuación lanzan una moneda no lastrada hasta que salga alguna de dichas secuencias, ganando el jugador que la haya elegido. ¿Que probabilidad de ganar tiene cada uno, y cuantas tiradas es de esperar que dure el juego?

6) En un comedor universitario el segundo plato se acompaña de una guarnición que puede ser de patatas fritas, ensalada o arroz. Cada día el cocinero elige aleatoriamente una única de estas guarniciones según las siguientes reglas:

(1) Nunca sirve arroz dos días seguidos.
(2) Si un día sirve arroz, al día siguiente tiene igual probabilidad de servir patatas o ensalada.
(3) Cuando toca patatas o ensalada, hay un 50% de posibilidades de repetir menú al día siguiente.
(4) Cuando en el caso anterior no repiten menú, es el doble de veces más probable que les toque la otra guarnición a que les toque arroz.
Plantear una cadena de Márkov que describa la evolución de la guarnición en el tiempo. A largo plazo, ¿qué probabilidad habrá de que toque cada una de las guarniciones?

7) Procesos de nacimiento y muerte.
(a) Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov finita. Supongamos que dados dos estados x, y existen números positivos a_x, a_y tales que

$$a_x p_{xy} = a_y p_{yx}$$

Demostrar que el vector $\{a_x\}_{x\in S}$ es una distribución de equilibrio. Supongamos además que $p_{ij} \neq 0 \iff |i-j| \leq 1$. Encontrar una expresión para la distribución de equilibrio.

8) Sistema de colas. Se observa que La oficina de tráfico de una cierta ciudad funciona de la siguiente manera. Cada vez que llega un cliente con probabilidad β acaba su gestión en cinco minutos y con probabilidad $(1-\beta)$ la gestión dura otros cinco minutos y asi sucesivamente. Por otro lado cada 5 minutos aparece un nuevo cliente con probabilidad p. En la oficina solo hay N asientos y si están ocupados los clientes que llegan se tienen que marchar. Queremos saber,
(a) En media y a largo plazo cuanto tiempo está la ventanilla ociosa.
(b) En media ¿cuantos clientes no pueden ser atendidos?
(Una posibilidad es estudiar la cadena de Markov definida por el numero de personas en la oficina).

9) Considera la Cadena de Ehrenfest descrita en clase con N estados.
(a) ¿Cuantas distribuciones de equilibrio existen?
(b) ¿Cuales son los posibles límites de $\pi_i(n)$?
(c) ¿Cuales son los tiempos de recurrencia?

10) Un amigo tuyo quiere comprar paneles solares para ponerlos en su casa de la sierra, pero quiere saber cuantos dias de sol dispondrá en media a lo largo de los años. En su pueblo han observado que el tiempo hoy depende de lo que ha ocurrido en los dos dias precedentes. Solo distinguimos dos posibilidades soleado o nublado. Dan como fiables las siguientes probabilidades:
(1) Si fue soleado hoy y ayer será soleado mañana con probabilidad 0.8.
(2) Si fue soleado hoy pero nublado ayer será soleado mañana con probabilidad 0.6.
(3) Si fue nublado hoy pero soleado ayer será soleado mañana con probabilidad 0.4.
(4) Si estaba nublado los dos ultimos dias, será soleado mañana solo con probabilidad 0.1
(a) A primera vista, el proceso no es Markoviano. Definir los estados para poder modelarlo con una cadena de Markov.
(b) ¿A largo plazo que tanto por ciento de los dias será soleado?