1) a) Un jugador, cuyo capital inicial es i euros, $0 < i < 3$, deja de jugar cuando pierde todo su dinero o alcanza la cifra de 3 euros. En cada juego se gana o se pierde 1 euro con probabilidad 1/2. Escribir la matriz de transición. Escribir las matrices de transición correspondientes a ir de un estado a otro en dos pasos, y en tres pasos. Comprobar cuanto suman las filas, y cuanto suman las columnas. Hallar $p_{11}(2009^{2009})$ y $p_{11}(2010^{2010})$, estableciendo cual es mayor. Determinar si hay y cuales son los estados absorbentes, recurrentes y transitorios.

b) En la siguiente variación, el jugador dispone de una máquina de acuñar euros, de modo que cada vez que su capital es cero (en tiempo n) acuña 1 euro (en tiempo $n+1$) y vuelve a jugar (en tiempo $n+2$). Escribir las matrices de transición de un estado a otro en n pasos, para $n = 1, 2, 3$. Hallar $p_{11}(2009^{2009})$ y $p_{11}(2010^{2010})$, estableciendo cual es mayor. Determinar si hay y cuales son los estados absorbentes, recurrentes y transitorios.

2) Se tienen $2N$ bolas, N blancas y N negras, y se distribuyen en 2 urnas (N bolas en cada una). Después de cada unidad de tiempo se sacan al azar dos bolas, una de cada urna, y se cambian de urna. Se toma como estado del sistema el número de bolas negras en la primera urna. Estudiar la Cadena de Markov, hallando la matriz de transición, dibujando el digrafo que representa la cadena, y determinando si hay y cuales son los estados absorbentes, recurrentes y transitorios.

3) Considérese un paseo aleatorio sobre una circunferencia en la que hay marcadas $N > 0$ posiciones. En cada una de ellas, nos movemos con probabilidad p un paso en el sentido de avance del reloj y, con probabilidad complementaria, un paso en el sentido opuesto. Escribir las matrices de transición de un estado a otro en n pasos, para $n = 1, 2, 3$. Determinar si hay y cuales son los estados absorbentes, recurrentes y transitorios.

4) Estudiar las siguientes cadenas de Markov:

a) Paseo aleatorio simple en $\{0, 1, \dots, N\}$ con barreras absorbentes en 0 y N.

b) Paseo aleatorio simple en $\{0, 1, \dots, N\}$ con una barrera absorbente en N y una mixta en 0 (es decir, las probabilidades de, en el siguiente paso, quedarse en 0 o volver a 1 son ambas positivas).

5) En una población de tamaño $N = 5$, algunas personas están enfermas. En cada periodo de tiempo, dos personas elegidas al azar (de modo que todos los pares tienen la misma probabilidad de ser elegidos) interactuan. Si una persona en el par está enferma y la otra no, la enfermedad se transmite con probabilidad 1/10. Hallar las matrices de transición correspondientes a n periodos, para $n = 1, 2, 3, 4$.

6) Enviamos un mensaje conteniendo la respuesta SI o la respuesta NO, a traves de un canal de transmisión que involucra diversos pasos. Sea $X_0 = \text{SI}$ la señal inicial, y sea X_n la respuesta recibida despues de n pasos. Supongamos que X_n es una cadena de Markov con probabilidades de transición $p_{\text{SISI}} = p_{\text{NONO}} = p$, y $p_{\text{SINO}} = p_{\text{NOSI}} = 1 - p$, donde $0 < p < 1$.

a) Calcular la probabilidad de que no haya errores en los dos primeros pasos.

b) Calcular la probabilidad de que el mensaje recibido despues de dos pasos sea correcto.