Procesos de nacimiento y muerte.
(a) Sea P una cadena de Markov finita. Supongamos que dados dos estados x, y existen números positivos a_x, a_y tales que

$$a_x p_{xy} = a_y p_{yx}$$

Demostrar que el vector $\{a_x\}_{x\in S}$ es una distribución de equilibrio.

Prueba: $\sum_j a_j p_{ji} = a_i \sum_j p_{ij} = a_i$, así que verifica la definición de distribución de equilibrio.

Sea P una cadena de Markov finita tal que $p_{ij} \neq 0 \iff |i-j| \leq 1$. Encontrar una expresión para la distribución de equilibrio.

Respuesta: Usando la igualdad anterior observamos que se reduce a
$a_{i+1} p_{i,i+1} = a_i p_{i+1,i}$
Por lo que llegamos a una recurrencia del tipo
$a_{i+1} = a_i \frac{p_{i+1,i}}{p_{i,i+1}} = a_i f(i)$
$a_{i+1} = a_0 \Pi_{j=1}^{i} f(j)$.

Sistema de colas. Se observa que La oficina de tráfico de una cierta ciudad funciona de la siguiente manera. Cada vez que llega un cliente con probabilidad β acaba su gestión en cinco minutos y con probabilidad $(1-\beta)$ la gestión dura otros cinco minutos y asi sucesivamente. Por otro lado cada 5 minutos aparece un nuevo cliente con probabilidad p. En la oficina solo hay N asientos y si están ocupados los clientes que llegan se tienen que marchar. Queremos saber,
(a) En media y a largo plazo cuanto tiempo está la ventanilla ociosa.
(b) En media, ¿cuantos clientes no pueden ser atendidos?
(Una posibilidad es estudiar la cadena de Markov definida por el numero de personas en la oficina).

Respuesta:
El modelo consiste en una cadena de Markov con N estados. Ademas es un proceso de nacimiento y muerte por que
$P_{i,i+1} = p(1-\beta), p_{i,i-1} = (1-p)\beta, p_{i,i} = p\beta + (1-p)(1-\beta)$
Por el ejemplo anterior podemos calcular el correspondiente $f(i)$. Es una cadena irreducible con elementos positivos en la diagonal. Lo que nos pide es calcular por un lado π_0 y por otro π_N. Sea $s = \frac{p(1-\beta)}{\beta(1-p)}$ Entonces

$$a_n = a_0 s^n, a_i = a_0 s^i$$

.
Usamos la condición
$\sum a_i = 1 = \sum a_0 s^i = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} s_i} = \frac{1-s}{1-s^{N+1}}$ y por tanto $a_N = \frac{s^N - s^{N+1}}{1-s^{N+1}}$.

Proceso aparentemente no Markoviano
Un amigo tuyo quiere comprar paneles solares para ponerlos en su casa de la sierra, pero quiere saber cuantos dias de sol dispondrá en media a lo largo de los años. En su pueblo han observado que el tiempo hoy depende de lo que ha ocurrido en los dos dias precedentes. Solo distinguimos dos posibilidades soleado o nublado. Dan como fiables las siguientes probabilidades:
(1) Si fue soleado hoy y ayer será soleado mañana con probabilidad 0.8.
(2)Si fue soleado hoy pero nublado mañana será soleado mañana con probabilidad 0.6.
(3)Si fue nublado hoy pero soleado ayer será soleado mañana con probabilidad 0.4.

(4) Si estaba nublado los dos ultimos dias, será soleado mañana solo con probabilidad 0.1
(a) A primera vista, el proceso no es Markoviano. Definir los estados para poder modelarlo con una cadena de Markov.
(b) ¿A largo plazo que tanto por ciento de los días será soleado?

Respuesta: La idea es considerar como estados el tiempo de ayer y hoy: (SS, SN, NS, NN). En función del tiempo ayer y hoy cálculamos el tiempo hoy y mañana. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

De lo que hayando la distribución estacionaria nos sale $\frac{1}{11}(3, 1, 1, 6)$. Ahora bien el problema nos pide la probabilidad de soleado hoy que es la unión de $\{SS\}$ y $\{SN\}$ por lo que nos da $\frac{3}{11} + \frac{1}{11} = \frac{4}{11}$.