MODELIZACIÓN I **Examen Final** CURSO 2009/10

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI: GRUPO:

DURACION MAXIMA DEL EXAMEN: 3 horas.

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas dos hojas. Cuando se pide en un apartado responder SI o NO, responder *únicamente* SI o NO, marcando adecuadamente la opción elegida.

I) Los puntos asignados a cada pregunta de este problema son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos.

1) K_9 (el grafo completo con 9 vértices) es planar. SI NO

2) En una fiesta con 7 chicas y 7 chicos, donde cada chica conoce por lo menos a 4 chicos y cada chico conoce por lo menos a 4 chicas ¿pueden bailar todos simultamenamente? (las chicas sólo bailan con chicos a quienes conocen). SI NO Por Hall.

3) Todo bosque con 75 vértices y 25 árboles tiene 50 aristas. SI NO

4) Existe un grafo plano con 12 vértices, 18 aristas, y 11 caras. SI NO 

5) Dos jugadores lanzan una moneda hasta que sale una determinada sucesión de longitud tres. El primer jugador elige 111 y el segundo, 001. La probabilidad de que gane el primer jugador es 1/8. SI NO Prob. $> \frac{1}{8}$

6) Todos los estados de una cadena de Markov irreducible y finita son recurrentes. SI NO

7) Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov finita, irreducible y periódica, entonces tiene una distribución invariante. SI NO Punto fijo

8) Dado el sistema dinámico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f \in C^1$, y dado w tal que $f(w) = w$, la solución de equilibrio $x_n = w$ es localmente atractora si $|f'(w)| < 1$. SI NO

9) Si la función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene una órbita de periodo 21, entonces tiene una órbita de periodo 105. SI NO Sharkovsky

10) En el modelo SIR de Kermack-McKendrick es necesario vacunar a toda la población para evitar una epidemia. SI NO Umbral

II) Consideramos una especie de insectos cuyo ciclo vital es anual, es decir, cada año salen de los huevos, ponen otros y mueren, digamos, en primavera, verano y otoño respectivamente. Denotamos por x_n la población normalizada de dicha especie en el verano del año n, de modo que $0 \le x_n \le 1$. Sea r la tasa de reproducción que dicha especie tendría en presencia de recursos ilimitados, y sea $0 < x_0 < 1$.

a) (2 puntos) Formular la ecuación logística adecuada para describir la situación anterior.

b) (8 puntos) Explicar que sucede a largo plazo cuando $r = 1/2$, $r = 3/2$, $r = 5/2$, y $r = 7/2$.

a) $X_{n+1} = X_n r(1 - X_n) = rX_n - rX_n^2$

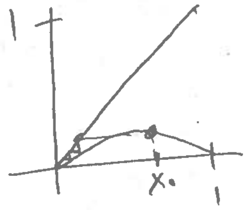
b) $f(x) = rx - rx^2$, $f'(x) = r - 2rx$, puntos de equilibrio del sistema discreto: $x = f(x) = rx - rx^2$, $x = 0$, $1 = r - rx$

$x = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$

1) $r = \frac{1}{2}$, $x = 0$ es el único punto de equilibrio (en $[0,1]$). Por 1, 8) más arriba $-1 < f'(0) = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ 0 es un atractor local.

Análisis gráfico

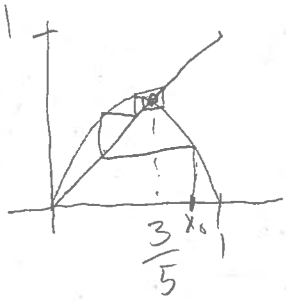


Atractor global
Extinción a largo plazo para todo $x_0 \in (0,1)$.

2) $r=\frac{3}{2}$, $x = 1-\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$, $f'(\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} - 2\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $|f'(\frac{1}{3})|<1$,
$x=\frac{1}{3}$ es un atractor local. Análisis gráfico:

Dado cualquier $x_0 \in (0,1)$, $x_n \to \frac{1}{3}$ cuando $n \to \infty$
Atractor global.

3) $r = \frac{5}{2}$, $x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, $f'(\frac{3}{5}) = \frac{5}{2} - 2\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{5} = -\frac{1}{2}$. $\frac{3}{5}$ es un atractor local.



Atractor global

4) $r = \frac{7}{2}$, $x = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$, $f'(\frac{5}{7}) = \frac{7}{2} - 2\,\frac{7}{2}\,\frac{5}{7} = -1'5$

$|f'(\frac{5}{7})| > 1$. Repulsor local. De hecho, se sabe que en este caso la dinámica es caótica.

Nótese que como $f'(0) = r$, para $r > 1$, $x = 0$ es un repulsor local; es decir, en los casos 2, 3 y 4.

III) (10 puntos) Consideremos el siguiente modelo simplificado de la población de mujeres de un cierto país. Dicha población se divide en 6 clases: E_0 = prepuberales, E_1 = solteras, E_2 = casadas, E_3 = divorciadas, E_4 = viudas, E_5 = fallecidas. Los cambios de estado se producen al final de cada periodo de tiempo, con las probabilidades dadas por

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente todas las mujeres empiezan en el estado E_0 y terminan en el estado absorvente E_5. Se pide calcular el número medio de periodos que las mujeres pasan en el estado E_2.

1) Como todo el mundo sabe, "absorvente" se escribe con 2 "b"s.

2) En este modelo simplificado de población, los cambios de estado se producen de manera discreta, por periodos. Una mujer puede acabar en E_2 siguiendo distintas trayectorias, por ejemplo, casandose y enviudando 7 veces. Se pide averiguar que ocurre en media.

Usamos el Análisis del primer paso.

Sea t_i el número medio de periodos en E_2 cuando una mujer empieza en el estado E_i. Con esta notación, la pregunta es "hallar t_0". Claramente $t_5 = 0$, ya que las fallecidas no se casan, en este modelo.

$t_0 = 0'9 t_1 + 0'1 t_5 = 0'9 t_1$, ya que el número de periodos en E_2 no cambia al dar este paso.

$t_1 = 0'5 t_1 + 0'4 t_2$, $t_2 = 0'6 t_2 + 0'2 t_3 + 0'1 t_4 + 1$ ya que al estar en E_2 y pasar 1 periodo, este debe contabilizarse, $t_3 = 0'4 t_2 + 0'5 t_3$

Luego $t_3 = 0'8 t_2$. $t_4 = 0'5 t_4 + 0'4 t_2 \Rightarrow t_4 = 0'8 t_2$

$t_0 = 0'9 t_1 = 0'9(0'8 t_2)$

$t_2 = 0'6 t_2 + 0'16 t_2 + 0'08 t_2 + 1$, $\frac{16}{100} t_2 = 1$

$t_2 = \frac{100}{16}$, $t_1 = \frac{8}{10} \frac{100}{16} = \frac{10}{2} = 5$

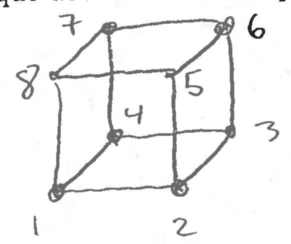
$t_0 = \frac{9}{10} \frac{10}{2} = \frac{9}{2}$ periodos.

IV) Sea G el grafo formado por los vértices y aristas del cubo $[0,1]^3$.

a) (4 puntos) Decidir razonadamente si G es planar.

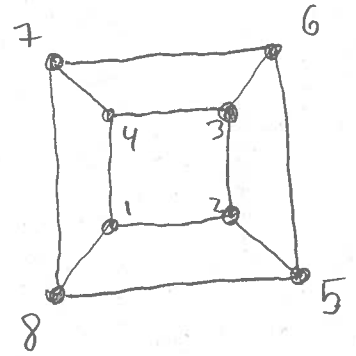
b) (6 puntos) Decidir razonadamente si G es bipartito. De ser la respuesta correcta afirmativa, decidir razonadamente si existe un emparejamiento perfecto, y de ser negativa, determinar el número mínimo de aristas que deben eliminarse para que el grafo sea bipartito.

G:



La numeración de los vértices puede elegirse de muchas formas. Una posibilidad es esta.

1) G es isomorfo al grafo plano



2) G es bipartito: dividimos los vertices en pares e impares. Las aristas siempre van de una clase a la otra.

Emparejamiento perfecto: $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$, $\{7,8\}$.

Alternativamente, se puede usar Hall o alguna de sus consecuencias para concluir que dicho emparejamiento existe.