MODELIZACIÓN I **Examen Final** CURSO 2010/11

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

DURACION MAXIMA DEL EXAMEN: 3 horas.

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas dos hojas. Cuando se pide en un apartado responder SI o NO, responder *únicamente* SI o NO, marcando adecuadamente la opción elegida.

I) Los puntos asignados a cada pregunta de este problema son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos.

1) En un grupo de seis personas siempre hay alguna con un número par de conocidos (en el grupo). SI NO

2) En un grupo de seis personas siempre hay alguna con un número impar de conocidos (en el grupo). SI NO

3) Existe un bosque con 75 vértices, 25 árboles y 50 aristas. SI NO

4) Existen 20 árboles con 10 nodos, tal que ningún árbol es isomorfo a ningún otro. SI NO

5) Dados 20 árboles con 4 nodos, al menos dos de ellos son isomorfos. SI NO

En una fiesta, cada chico conoce exactamente a 7 chicas y cada chica conoce exactamente a 7 chicos. Para formar una pareja de baile, son necesarios un chico y una chica que además se conozcan.

6) El número de chicas es igual al de chicos. SI NO

7) Es posible que todos los asistentes a la fiesta bailen en pareja simultaneamente. SI NO

8) Existe un grafo plano con 6 vértices y 9 caras. SI NO

9) Lanzamos una moneda repetidamente (bajo las condiciones habituales). Para cada sucesión de lanzamientos w, definimos $X_i(w) = 1$ si sale cara en el i-ésimo lanzamiento correspondiente a w, y $X_i(w) = 0$ si sale cruz. Entonces $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov. SI NO

10) Dos jugadores lanzan una moneda hasta que sale una determinada sucesión de longitud tres. El primer jugador elige 111 y el segundo, 011. La probabilidad de que gane el primer jugador es 1/8. SI NO

11) Todos los estados de una cadena de Markov irreducible y finita son recurrentes. SI NO

12) Una cadena de Markov finita, en la que todos los estados son recurrentes, es irreducible. SI NO

13) Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov finita e irreducible, con matriz de transición P, entonces existe una $N > 0$ tal que si $n \geq N$, todas las entradas de P^n son estrictamente positivas. SI NO

14) Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov finita, irreducible y aperiódica, con matriz de transición P, entonces entonces existe una $N > 0$ tal que si $n \geq N$, todas las entradas de P^n son estrictamente positivas. SI NO

15) Dada la ecuación $x' = f(x)$ con $f \in C^1$, y dado w tal que $f(w) = 0$ y $f'(w) \neq 0$, la solución de equilibrio $x(t) = w$ es localmente repulsora si $f'(w) > 0$. SI NO

16) Dado el sistema dinámico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f \in C^1$, y dado w tal que $f(w) = w$, la solución de equilibrio $x_n = w$ es localmente repulsora si $|f'(w)| > 1$. SI NO

17) Si la función continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene una órbita de periodo 21, entonces tiene una órbita de periodo 14. SI NO

18) Si la función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene una órbita de periodo 15, entonces tiene una órbita de periodo 21. SI NO

19) El modelo de Lotka-Volterra es estructuralmente estable. SI NO

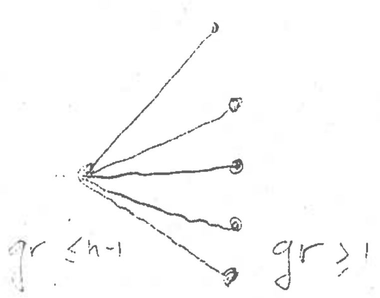
20) En el modelo de Kermack-McKendrick es necesario vacunar a toda la población para evitar una epidemia. SI NO

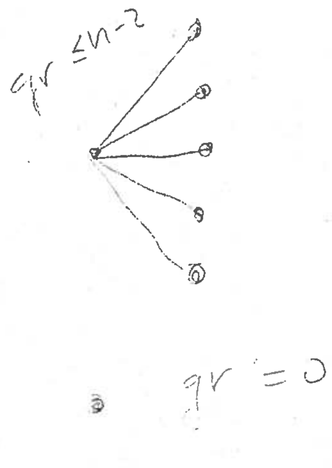
II) (10 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: en todo grupo de al menos dos personas, hay (al menos) dos personas con el mismo número de conocidos (dentro del grupo).

Verdadera. En términos de grafos, esto significa que al menos 2 vértices tienen el mismo grado.

Demostración: Sea $n \geq 2$. Si al menos 1 vértice tiene grado 0, el grado máximo de todos los vértices es $\leq n-2$. Como tenemos n vértices y $\leq n-1$ grados $(0, \ldots, \max_{v \in G} gr(v) \leq n-2)$, por el principio del palomar algún grado se repite.

Si $\min_{v \in G} gr(v) \geq 1$, como $\max_{v \in G} gr(v) \leq n-1$, por el principio del palomar algún grado se repite. $\blacksquare$





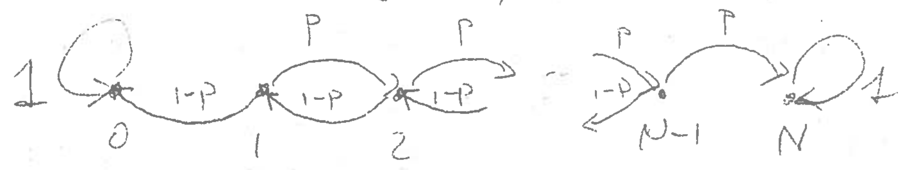
3) Estudiar las siguientes cadenas de Markov, es decir, dar las probabilidades de transición, el conjunto de estados, clasificandolos por tipo (recurrentes, transitorios, etc.), ver si existen distribuciones estacionarias y, en caso afirmativo, encontrarlas todas.

a) Paseo aleatorio simple en $\{0, 1, \dots, N\}$ con barreras absorbentes en 0 y N.

b) Paseo aleatorio simple en $\{0, 1, \dots, N\}$ con una barrera absorbente en N y una mixta en 0 (e.d. las probabilidades de, en el siguiente paso, quedarse en 0 o volver a 1 son ambas positivas).

a) Transitorios, $i \in \{1, \dots, N-1\}$, ya que $i \underset{\not\leftarrow}{\longrightarrow} N$.

Recurrentes: $\{0, N\}$ (de hecho, absorbentes)



, $0 < p < 1$

Distribuciones estacionarias: soluciones de $x^T P = x^T$, sujetas a $x_i \geq 0$, $\sum_1^N x_i = 1$.

$$(x_1 \; x_2 \; \dots \; x_N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1-p & 0 & p & \dots & & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \dots & 0 & p \\ & & & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & & \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2 \dots x_N)$$

$x_1 + (1-p)x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = 0$, $(1-p)x_3 = x_2 \Rightarrow x_3 = 0$, $p x_2 + (1-p)x_4 = x_3 \Rightarrow x_4 = 0, \dots$, $p x_{N-2} = x_{N-1} \Rightarrow x_{N-1} = 0$

$p x_{N-1} + x_N = x_N$. Todas las distribuciones estacionarias tienen la forma $(x_1 \; 0 \; 0 \dots 0 \; x_N)$, $x_1, x_N \geq 0$, $x_1 + x_N = 1$

b) Transitorios, $\{0, 1, \dots, N-1\}$, Recurrente: $\{N\}$. (si $0<r<1$, $0<p<1$)

$$(x_1 \dots x_N) \begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & p \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & \dots & & 1 \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_N)$$

$p x_{N-1} + x_N = x_N \Rightarrow x_{N-1} = 0$, etc. $x_N = 1$, $x_1 = \dots = x_{N-1} = 0$ es la única distribución invariante.

Otra forma de ver cuales son las distribuciones invariantes sin echar cuentas es la siguiente:

a) Sea $(\pi_1 \ldots \pi_N) P = (\pi_1 \ldots \pi_N)$ es invariante, es decir, $\pi = (\pi_1 \ldots \pi_N)$ es invariante. Si π es la distribución inicial, a largo plazo la probabilidad de estar en i es π_i, por invarianza. Luego $\pi_i = 0$ si i es transitorio, $\pi_i \geq 0$ para $i = 0, 1$, con $\pi_1 + \pi_N = 1$.

b) Si $\pi = (\pi_1 \ldots \pi_N)$ es invariante,
$\pi_1 = \cdots = \pi_{N-1} = 0$, $\pi_N \geq 0$, luego
$\pi = (0 \; 0 \; \ldots \; 0 \; 1)$.