NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

DURACION MAXIMA DEL EXAMEN: 3 horas.

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas dos hojas. Cuando se pide en un apartado responder SI o NO, responder *únicamente* SI o NO, marcando adecuadamente la opción elegida.

I) Los puntos asignados a cada pregunta de este problema son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos.

1) En un grupo de seis personas siempre hay alguna con un número par de conocidos (en el grupo). SI NO

2) En un grupo de seis personas siempre hay alguna con un número impar de conocidos (en el grupo). SI NO

3) Existe un bosque con 75 vértices, 25 árboles y 50 aristas. SI NO

4) Existen 20 árboles con 10 nodos, tal que ningún árbol es isomorfo a ningún otro. SI NO

5) Dados 20 árboles con 4 nodos, al menos dos de ellos son isomorfos. SI NO

En una fiesta, cada chico conoce exactamente a 7 chicas y cada chica conoce exactamente a 7 chicos. Para formar una pareja de baile, son necesarios un chico y una chica que además se conozcan.

6) El número de chicas es igual al de chicos. SI NO

7) Es posible que todos los asistentes a la fiesta bailen en pareja simultaneamente. SI NO

8) Existe un grafo plano con 6 vértices y 9 caras. SI NO

9) Lanzamos una moneda repetidamente (bajo las condiciones habituales). Para cada sucesión de lanzamientos w, definimos $X_i(w) = 1$ si sale cara en el i-ésimo lanzamiento correspondiente a w, y $X_i(w) = 0$ si sale cruz. Entonces $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov. SI NO

10) Dos jugadores lanzan una moneda hasta que sale una determinada sucesión de longitud tres. El primer jugador elige 111 y el segundo, 011. La probabilidad de que gane el primer jugador es 1/8. SI NO

11) Todos los estados de una cadena de Markov irreducible y finita son recurrentes. SI NO

12) Una cadena de Markov finita, en la que todos los estados son recurrentes, es irreducible. SI NO

13) Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov finita e irreducible, con matriz de transición P, entonces existe una $N > 0$ tal que si $n \geq N$, todas las entradas de P^n son estrictamente positivas. SI NO

14) Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov finita, irreducible y aperiódica, con matriz de transición P, entonces entonces existe una $N > 0$ tal que si $n \geq N$, todas las entradas de P^n son estrictamente positivas. SI NO

15) Dada la ecuación $x' = f(x)$ con $f \in C^1$, y dado w tal que $f(w) = 0$ y $f'(w) \neq 0$, la solución de equilibrio $x(t) = w$ es localmente repulsora si $f'(w) > 0$. SI NO

16) Dado el sistema dinámico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f \in C^1$, y dado w tal que $f(w) = w$, la solución de equilibrio $x_n = w$ es localmente repulsora si $|f'(w)| > 1$. SI NO

17) Si la función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene una órbita de periodo 21, entonces tiene una órbita de periodo 14. SI NO

18) Si la función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene una órbita de periodo 21, entonces tiene una órbita de periodo 15. SI **NO**

19) El modelo de Lotka-Volterra es estructuralmente estable. SI **NO**

20) En el modelo de Kermack-McKendrick es necesario vacunar a toda la población para evitar una epidemia. SI **NO**

II) (10 puntos) Supongamos que si un día hace sol, la probabilidad de que al día siguiente haga sol es 6/10, mientras que si el día está nublado, entonces el día siguiente está nublado con probabilidad 7/10. Decidir razonadamente si a largo plazo esperamos ver más días nublados o soleados. Si hoy hace sol, determinar cuantos días será necesario esperar, en media, para volver a tener un día soleado.

Estados: S, N $\qquad P = \begin{pmatrix} 6/10 & 4/10 \\ 3/10 & 7/10 \end{pmatrix}$

Por el teorema de convergencia, las probabilidades de tener un día nublado o soleado convergen a las entradas de la distribución invariante.

$$(a \ b) \begin{pmatrix} 6/10 & 4/10 \\ 3/10 & 7/10 \end{pmatrix} = (a \ b)$$ sujeto a $a, b \geq 0$, $a + b = 1$, implica que $(a \ b) = \left(\frac{3}{7} \ \frac{4}{7}\right)$, luego es más probable tener días nublados.

Por el Teor. Ergódico para CM, si T_{SS} denota el primer retorno (≥ 1) a un día soleado,

$$E\, T_{SS} = \frac{1}{a} = \frac{1}{3/7} = \frac{7}{3}.$$

Tambien puede usarse el análisis del primer paso, pero hacerlo desaprovecha el trabajo empleado en hallar la distribución invariante.

III) 1) (2 puntos) Enunciar la fórmula de Euler (indicando a que tipo de grafos se aplica).

2) (2 puntos) Acotar, justificando la respuesta, el número de caras de un grafo plano en términos del número de aristas.

3) (2 puntos) Acotar el número de aristas de un grafo plano en términos del número de vértices n, suponiendo que $n \geq 3$. Sugerencia: usar los dos apartados anteriones. Se puede utilizar sin demostración el hecho de que un grafo plano no conexo siempre puede obtenerse, borrando aristas, a partir de un grafo plano conexo.

4) (2 puntos) Probar que todo grafo plano tiene un vértice v con grado $gr(v) \leq 5$. Sugerencia: usar el apartado 3).

5) (2 puntos) Probar que K_5, el grafo completo con 5 vértices, no es planar. Sugerencia: usar los apartados 1) y 2).

1) Si G es plano y conexo, entonces $|V|-|A|+|C|=2$

2) $|C| \leq \frac{2|A|}{3}$ para $|A| \geq 2$, ya que salvo la cara no acotada, cada cara requiere al menos 3 aristas, y cada arista puede usarse, como mucho, para definir 2 caras.

3) Si G es plano, NO NECESARIAMENTE CONEXO, $|V|-|A|+|C| \geq 2$ (si el grafo es conexo tenemos igualdad por la fórmula de Euler; si no, estamos restando menos aristas que en el caso conexo).

$|A| \leq |V|+|C|-2 \leq |V| + \frac{2|A|}{3} - 2 \Rightarrow |A| \leq 3|V|-6.$

(¿Donde hemos usado $|V| \geq 3$?).

4) Si $gr\, v \geq 6$ para todo vértice v,

$3|V|-6 \geq |A| \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} gr(v) \geq 3|V|$. Contradicción

5) Si K_5 fuera planar, sería isomorfo a un grafo plano con $|V|=5$ y $|A| = \binom{5}{2} = 10$.

Por la fórmula de Euler, $|C| = 2+|A|-|V| = 7$, pero $|C| \leq \frac{2|A|}{3} = \frac{20}{3} < 7$. Contradicción.

Alternativamente, usando 3) tenemos que $|A| \leq 3|V|-6 = 15-6=9$, pero $|A|=10$.

IV) 1) (4 puntos) Determinar la evolución del sistema dinámico $x' = 9 - 6x + x^2$, dada una condición inicial x_0 arbitraria (considerar todas las condiciones iniciales posibles).

2) (6 puntos) Analizar la estabilidad del siguiente sistema en torno al punto crítico $(0,0)$:

$$\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Sugerencia: usar alguna función de Liapunov de la forma $V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

1) $x' = f(x) = (x-3)^2$. Solución de equilibrio: $x(t) \equiv 3$.
Si $x_0 < 3$, $f(x(t)) = x'(t) > 0$, luego $x(t)$ crece hacia 3, sin cortarlo nunca por unicidad.
Si $x_0 > 3$, la solución $x(t)$ con $x(0) = x_0$ tiende a infinito cuando t crece ($x' > 0$).
(De hecho, resolviendo explícitamente puede verse que $x(t)$ no está definida para todo $t > 0$, hay explosión en tiempo finito, pero esto no se preguntaba en el problema

2) Tomamos $V(x,y) = x^2 + y^2$.
1) V es definida positiva en $\mathbb{R}^2$
2) $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty} V(x,y) = \infty$
3) $\dot{V}$ es definida negativa:

$$\dot{V}(x,y) = dV(x,y)\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y - x(x^2+y^2) \\ -x - y(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

$= -2x^2(x^2+y^2) - 2y^2(x^2+y^2) < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Luego $(0,0)$ es un atractor GLOBAL.