

1) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1) (2 puntos) Un árbol suficientemente grande puede tener 7 vértices de grado 7.

V.



2) (2 puntos) Hay grafos planos con más aristas que vértices.

V.



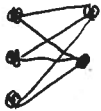
3) (2 puntos) Hay árboles con más aristas que vértices.

NO.

$$|A| = |V| - 1$$

4) (2 puntos) Hay grafos bipartitos con más aristas que vértices.

SI.



5) (2 puntos) Todo grafo bipartito con clases C_1 y C_2 , que satisfaga las siguientes condiciones, contiene un emparejamiento perfecto: hay 4 vértices en cada clase; cada vértice en C_1 está conectado al menos a 3 vértices en C_2 ; y cada vértice en C_2 está conectado al menos a 1 vértice en C_1 .

SI. Por HALL. Sea $A \subset C_1$ y sea $A' = Adj(A)$, si $|A| = 1, 2, 3$,

$|A'| \geq 3$ por la condición $\forall v \in A, g_r(v) \geq 3$. Si $|A| = 4$,

$A = C_1$ y $Adj(A) = C_2$, por la condición $g_r(v) \geq 1$

$\forall v \in C_2$. Luego $|A| \leq |A'|$ en todo caso.

2) (10 puntos) Lanzamos una moneda equilibrada hasta que salen 3 cruces seguidas, momento en el que paramos. Hallar el número medio de lanzamientos.

$S = \{0, 1, 11, 111\}$, $h_i =$ n° de lanzamientos esperados

hasta alcanzar 111. $h(0) = 1 + \frac{1}{2}h(0) + \frac{1}{2}h(1)$,

$h(0) = 2 + h(1)$, $h(1) = 1 + \frac{1}{2}h(0) + \frac{1}{2}h(11) = 2 + \frac{1}{2}h(1) + \frac{1}{2}h(11)$

$h(1) = 4 + h(11)$, $h(11) = 1 + \frac{1}{2}h(0) + \frac{1}{2}h(11) = \frac{1}{2}h(0) + 1$

$h(1) = 4 + 1 + \frac{1}{2}h(0)$,

$h(0) = 2 + 5 + \frac{1}{2}h(0)$, $\boxed{h(0) = 14}$

3) a) (5 puntos) Determinar la evolución del sistema dinámico

$$x' = 6x^3 + 11x^2 - 24x - 9$$

dada una condición inicial x_0 arbitraria.

SOLN. DE EQUILIBRIO: 3, -1/3, 3/2. Para lo demás, argumentar igual que en las Soluciones Sept. 2009.

b) (5 puntos) Analizar la estabilidad del siguiente sistema en torno al punto crítico (0, 0):

$$\begin{cases} x' = 3y - 2x(x^2 + y^2) \\ y' = -3x - 5y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Argumentar como en las soluciones Junio 2010.