Estas soluciones las escribió el año pasado Daniel Faraco (gracias Daniel)
Algunos cambios en las soluciones de los problemas 1 y 2

Modelización I — **Sistemas Dinámicos 1** — Curso 2008/09

1) Crecimiento en pesqueria con captura I
La evolución de la población de peces con captura viene dada por la ecuación logística
$x' = Rx(K - x)$
Si la población se ve sometida a una explotación pesquera que produce h toneladas por unidad de tiempo la ecuación se transforma en
$x' = Rx(1 - \frac{x}{K}) - h(t)$.
Supongamos primero h constante.

a) Demuestra que si la captura es menor que una cierta cantidad h_{max} que debes determinar existe un único stock de equilibrio sostenible x_e (Interpreta que quiere decir sostenible y relacionalo con los posibles puntos de equilibrio y su estabilidad)
Solución: Buscamos los stock de equilibrio igualando a cero la función $Rx(1 - \frac{x}{K}) - h(t) = 0$. La funcíon logistica tiene un maximo en $\frac{K}{2}$ que es $\frac{RK}{4} = h_{max}$. Para h menor tenemos dos puntos de equilibrio (Intersecar la gráfica de la logistica con la recta $y = h$ y vemos que el primero es inestable y el segundo estable. El inestable no es sostenible porque conduce a la extinción o al otro stock de equilibrio)

b) ¿Que ocurré con x_e cuando h aumenta pero es menor que h_{max}? Y si $h > h_{max}$?
Solución: Va disminuyendo hasta converger al stock de equilibrio $\frac{K}{2}$. Si $h > h_{max}$. Entonces $x(t)$ es una función decreciente lo que hace que la población se extinga en tiempo finito.

c) ¿Teóricamente qué stock de equilibrio permite la captura máxima?
¿Que riesgo tiene permitir una captura muy cercana a la máxima? [1]?
Solución:
La región de atracción del punto de equilibrio sostenible es muy pequeña.

2) Crecimiento en pesqueria con captura 2 Modelo de Schaeffer Los modelos de explotación pesquera como el anterior ignoran el hecho de que la captura es una actividad humana cuyos resultados dependen de los factores productivos invertidos y de la cantidad de stock existente. Si E es la variable esfuerzo pesquero (número de barcos por dia) entonces se supone que la captura es proporcional a dicho esfuerzo pesquero y al stock existente.

a) Escribe una ecuación diferencial autónoma para explicar la evolución del stock suponiendo el esfuerzo pesquero constante.
Solución: $x' = F(x) = Rx(1 - \frac{x}{K}) - qEx$.

b) Representa en un diagrama la ley de crecimiento endógeno y la de captura. Demuestra que si el esfuerzo pesquero crece por encima de un cierto nivel E_{max} el stock se agotará independientemente de las condiciones iniciales.
Solución: Simplemente dibujar la gráfica de la curva logística $Rx(1 - \frac{x}{K})$ y de la recta qEx que describe las capturas. Si E es mayor que un cierto valor sólo se intersecan en $x = 0$ (para $x \geq 0$), luego $F(x) < 0$ cuando $x > 0$, y por tanto $x(t)$ es decreciente.

c) Prueba que el stock de equilibrio es una función decreciente del esfuerzo pesquero. ¿Cual es el esfuerzo pesquero que garantiza una captura máxima de equilibrio?
Solución:
Cuanto mayor sea la pendiente de la recta de capturas qEx, antes cortará la gráfica de la curva logística, es decir, más pequeño será el segundo cero de F.
El esfuerzo que garantiza una captura máxima sostenible es aquel en el que la recta qEx corta a la logística en el punto más alto posible. El máximo de $Rx(1 - \frac{x}{K})$ ocurre en $x = K/2$ y vale $RK/4$.

[1] Que quiere decir el otro punto de equilibrio

Por tanto, la pendiente óptima de la recta de capturas viene dada por $qE = (RK/4)/(K/2) = R/2$, o equivalentemente, $E = R/(2q)$.
Alternativamente, podemos maximizar $h(x, E) := qEx$ sujeta a $0 = F(x, E) := Rx(1 - \frac{x}{K}) - qEx$, usando los multiplicadores de Lagrange para comprobar que $E = R/(2q)$ maximiza las capturas sostenibles.

d) Da una formula para describir la captura en equilibrio en términos del esfuerzo pesquero y discute como evoluciona en términos de E. El patrón de los barcos te dice que cuantos más barcos mas capturas, intenta explicarle que esto solo es asi a corto plazo con tus modelos y sugierele cual es el esfuerzo pesquero que maximiza las capturas.[2]
Solución:
Si $x > 0$, entonces

$$Rx(K - x) - qEx = 0 \iff R(1 - \frac{x}{K}) = qE \iff x_e = KR - qKE$$

La captura en equilibrio

$$h(x_e, E) = qEx_e = qKRE - q^2KE^2$$

es una función concava con respecto a E, que alcanza su máximo cuando $E = \frac{R}{2q}$ (esto tambien resuelve el apartado anterior).

3) Modelo de Solow: Generalización
El Modelo de crecimiento económico de Solow visto en clase se basaba en la función de producción de Cobb-Douglas. En los modelos económicos mas generales, la dinámica de crecimiento de la economia viene gobernada por una ecuación similar

$$k' = sf(k) - (\mu + \delta)k,$$

donde k es el capital, f la productividad, $0 < s < 1$ la proporción de la producción invertida en mejorar el capital, δ la tasa de depreciación del capital por unidad de tiempo y μ es la tasa de crecimiento de la población.
La productividad f es desconocida pero satisface las siguientes propiedades

i) $f(0) = 0$

ii) f es creciente y concava para todo $k > 0$

iii) $sf'(0) - (\mu + \delta) > 0$

iv) $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$

a) Encuentra los equilibrios de esta economía. Demuestra que existe un unico equilibrio $k_e > 0$ y discute su estabilidad(*Intensidad de capital de equilibrio*). ¿Que ocurrirá con el tiempo si $k(0) = k_0$ con $0 < k_0 < k_e$? ¿Y $k_0 > k_e$? ¿Y si $k_0 = 0$?

b) ¿Como influye la tasa de crecimiento de la población en el valor del capital en equilibrio? ¿Y la tasa de depreciación?

c) El consumo per capita viene dado por $f(k) - I$ donde $f(k)$ es lo que produces e I es lo que inviertes $sf(k) - (\mu + \delta)k$[3].¿ Para que valor de k se hace máximo el consumo per capita en terminos de la producción marginal f'? **d)** Supón ahora que hay un avance técnológico. En la ecuación de evolución lo representamos por

[2]Evidencia empírica: La gamba del mediterraneo
[3]la tasa de crecimiento de k

$$k' = sAf(k) - (\mu + \delta)k,$$

donde $A > 1$ ¿Como varía el equilibrio?

Solución: Intersecar la gráfica de $s(f(k))$ con la de la recta $(\mu+\delta)k$ se ve que siempre hay una única intersección, que para k cercano a cero $sf(k)$ es mayor que la recta que corta asi que el equilibrio es atractor.
a) si $k < k_e$ siempre tiende a k_0.
b y d) Si aumentamos μ o δ la recta corta antes a la gráfica con lo que el equilibrio disminuye si hay un avance tecnológico el equilibrio aumenta.
c)

$$C(k) = sf'(k) - (\mu + \delta) = 0 \iff f'(k) = \frac{\mu + \delta}{s}$$

4) Se ha observado que una población se duplicó al cabo de 8 horas.

a) Si estuviera creciendo con tasa de crecimiento constante γ ¿cuál sería γ?

$$\gamma = \frac{\log(2)}{8}$$

b) Si al cabo de 15 horas se ha triplicado (respecto de su valor inicial P), ¿podemos seguir creyendo que la tasa es constante?
Solución: No porque $\frac{\log(2)}{8} \neq \frac{\log(3)}{15}$

c) Si suponemos en cambio que el crecimiento es logístico, ¿cuál sería la población de equilibrio L en términos de P?
Solución:
Rosolvemos el problema primero para la ecuación logistica con constante 1,

$$x_1(t) = \frac{x_0}{x_0 e^{-t} + (1 - x_0)}$$

$$x(t_2) = 2x_0 \iff x(t_3) = 3x_0$$

Ahora sabemos que para la logística general con población de saturación K y ritmo r es

$$x(t, x_0) = Kx_1(rt, \frac{x_0}{K})$$

ajustando sale P

5) Se considera una reacción nuclear en cadena en la cual la tasa de cambio (x') del numero de moléculas es proporcional al número de encuentros entre ellas pero la tasa de mortalidad (pierden actividad) es constante $\alpha > 0$. Encuentra una ecuación diferencial que describa el comportamiento de las soluciones positivas.
Solución:

$$x' = kx^2 - \alpha x$$

a) ¿A que tendría sentido llamar valor crítico?

Solución:

$$kx^2 - \alpha = 0 \iff x = \sqrt{\frac{\alpha}{k}}$$

b) ¿Están las soluciones definidas en todo tiempo?

Solución:

No (ver siguiente)

c) ¿Para un sistema autónomo general puedes dar condiciones que garanticen que se produce explosión(las soluciones no están definidas para todo tiempo)?
Solución:
Supongamos que los ceros de f están acotados por una constante M y ea $X(0) = x_0 > M$.

$$x' = f(x) \iff \frac{x'}{f(x)} = t \iff \int_0^{t_{max}} \frac{x'(t)dt}{f(x(t))} = t_{max} - t_0$$

Cambiando de variable $v = (x(t)$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{v} dv = t_{max}$$

por lo que t_{max} es finito si $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{v} dv < \infty$

6) Un grupo de ecólogos te piden que estimes a nivel cualitativo la tasa de crecimiento $\frac{x'}{x} = r(x)$ de diversas poblaciones a partir de ciertos datos empíricos que han observado (modelo continuo)

i) Observan dos equilibrios estables consecutivos $0 < x_0 < x_1$.

   Solución:

   Imposible !

ii) Observan que las poblaciones tienden a extinguirse cuando la densidad es menor que x_0, la velocidad de reproducción maxima se alcanza cuando la población es x_1 y además a largo plazo si las poblaciones no se extinguen tienden a x_2.

   Solución:

   Es decir tiene un punto inestable en x_0(Efecto Umbral), un punto estable en x_2 y el maximo de $f(x)$ es en x_1. Por tanto $f(x) = xr(x)$ es negativa hasta x_0 positiva hasta x_2 y negativa después. Tiene un máximo en x_1.

- Observan que la población crece exponencialemente cerca de cero, se reproduce velozmente cerca de x_1 pero después inexplicablemente se reproduce de manera muy lenta. Cerca de un valor x_2 observan que a veces la población tienden a estabilizarse y otras crece rapidamente hacia un valor mayor x_3. Aunque comiencen con poblaciones muy altas, a la larga siempre observan valores que no exceden x_3.

  Solución:

  La función $f(x) = xr(x)$ es positiva entre 0 y x_2 tomando un máximo local en x_1, se hace 0 en x_2 pero sigue siendo positiva hasta que se vuelve hacer cero en x_3 a partir de donde es negativa.

7) Para $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (c - x)x$ con $1 < c < 4$ se considera el sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ para $k \geq 0$ con x_0 dado.

a) Comprobar que 0 y $c - 1$ son los únicos puntos fijos de f.

$$(c - x)x = x \iff x = 0, c - 1$$

b) Comprobar que tanto si $x_0 = 0$ como si $x_0 = c$ entonces $x_k = 0$ para $k \geq 1$.

c) Demostrar que tanto si $x_0 < 0$ como si $x_0 > c$ entonces $x_k \to -\infty$ cuando $k \to \infty$.
a) Suponemos que $x_0 < 0$ porque si $x_0 > c$, $x_1 < 0$
b)Probamos por inducción que $x_n < c^n x_0$. Primero probamos a partir de la gráfica que $x_n \leq 0$ y despues $x_n = (c - x_{n-1})x_{n-1} \underbrace{\leq} -x_{n-1} > 0 c x_{n-1}$

Solución: Es suficiente suponer que $x_0 < 0$. Entonces $\frac{f(x)}{x} = c - x$ asi que si $x < x_0$ $\frac{f(x)}{x} > c - x_0$ y como x es negativo $f(x) < (c - x_0)x_0$. Iterando $x_k < (c - x_0)^k x_0$ y como $c > 1, x_0 < 0$ $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

d) Demostrar que si $1 < c \leq 2$ entonces $x_k \to c - 1$ si $0 < x_0 < c$.
La clave es que la función es creciente. Dos casos
$0 < x_0 < x_c$ entonces $f(x_0) > x_0$. Por la gráfica y por mononotia $f(x_0) < f(x_c) = x_c$. Asi que $x_0 < f(x_0) < x_c$. Lo mismo para todas asi que

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_n < x_c$$

Una sucesión creciente y monótona converge a un límite que tiene que ser x_c.

e) ¿Qué condiciones sobre c se tienen que cumplir para que el sistema dinámico tenga un ciclo de orden 2?
Solución:
Tenemos que encontrar puntos fijos de $f^{2)}$ que no lo sean de f es decir buscar soluciones de la ecuación

$$\frac{f^{2)}(x) - x}{\Pi(x - x_c)} = 0$$

donde x_c es critico de f. En nuestro caso
$\frac{x(c-x)(c-x(c-x))-x}{x(x-(c-1)} = -x^2 + (c+1)x - (c+1)$ que posee dos soluciones si $c + 1 - 1 > 4$ es decir $c = 3$

f) ¿Es cierto para algún $c > 2$ que dado x_0 cualquiera con $0 < x_0 < c$ se tiene que $x_k \to c - 1$?

8) Considera la ecuación

$$x' = x(1 - x) + f(t)$$

con $f(t) = 0.5\text{sen}(t)$. Se pretende demostrar la acotación de soluciones cuanto t tiende a infinito. (Sugerencia: Considera la familia de funciones tales que v_c $v_c'(t) = f$. Se puede probar que la trayectorias de v_c actúan como vallas. Supón que una trayectoria $x(t)$ corta un conjunto de nivel de v y analiza el signo de $(x - v)'$)
Solución:
Supongamos que x corta el conjunto de nivel de v_c en t_0. Entonces $g(t) = x - v_c$, $g(t_0) = 0$ y

$$(g'(t_0) = x(t_0)(1 - x(t_0)) = v(t_0)(1 - v(t(_0)))$$

Si $v(t) = c - 0.5cos(t)$ para todo t $c - 0.5 \leq v(t) \leq c + 0.5$. En particular si $c > 1.5$ $v(t) > 1$ independientemente de t por lo que $v(t_0)(1 - v(t(_0))) < 0$ y $g'(t_0) < 0$. De este modo g es decreciente. Por lo que $x(t) < v(t) < c + 0.5$.
Del mismo modo para valores pequeños de c la gráfica solo se puede cruzar hacia arriba.

9) Estudia la dinámica de una población dada por la recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde f es una función monótona[4]
La sucesión x_n es tambien monótona o creciente o decreciente. Si permanece acotada va a converger a punto fijo de f.

a) ¿ Pueden existir órbitas periódicas?

b) Discute el comportamiento de las orbitas en función de los puntos de equilibrio de f
Solución: Son crecientes o decrecientes entre los equilibrios de f

c) Una ecuación diferencial se puede entender como el límite de una sucesión de ecuaciones en diferencias. ¿Por que no aparecen orbitas periódicas? Investiga el comportamiento de $x_{n+1} - x_n = f(x_n)$

[4] No decreciente o no creciente

Solución:
La ecuación discreta que emerge de una ecuación diferencial es

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n)$$

es decir

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)$$

Los ceros de f se corresponden con los puntos fijos de $g = x + f$. Además si f es positiva (respectivamente la función g satisface $g(x) > x$ asi que la sucesión x_n es estrictamente creciente o decreciente).

10) Considera la función tienda definida en el intervalo $[0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Calcula el grafo de transición, los itinerarios y explica si genera una dinámica con dependencia sensible de parametros
Solución:
El análisis es el mismo que el de la logistica de hecho:

b) Prueba que la función tienda y la logística son conjugadas por la función $C(x) = \frac{(1-\cos(\pi x))}{2}$ es decir, dos funciones conjugadas presentan el mismo comportamiento dinámico. T y G son funciones conjugadas si

$$C(T(x)) = G(C(x))$$

$$G(Cx)) = 4\frac{(1-\cos(\pi x))}{2}(1 - \frac{(1-\cos(\pi x))}{2}) = 1 - \cos(\pi x)) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

$$C(T(x)) = \frac{(1-\cos(\pi T(x)))}{2} = \frac{(1-\cos(\pi 2x))}{2} = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

En la penultima igualdad usamos que el coseno es periódico y par y en la última la formula de $\cos(2x)$.

11) Considera la función tienda

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x) & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Investiga que puntos tienden a infinito
Solución:
Si $x(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ $f(x) > 1$ y después tienden a infinito. Lo mismo le va a ocurrir a todo punto tal que $f^k(x)(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ es decir al complementario del conjunto de cantor.

b) Investiga que puntos permanecen acotados y que les ocurre. LLama a este conjunto C. Sea $N(r)$ el número de intervalos de longitud r necesario para cubrir C y sea

$$\dim(C) = \lim_{r \to 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)}$$

Asumiendo que el límite existe prueba que $\dim(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$. Sin embargo prueba que el segmento unidad tiene dimensión uno.
Solución:
En cada generación obtenemos 2^k cubrimientos de longitud 3^{-k}.

En el intervalo unidad necesitamos 2^k intervalos de tamaño 2^{-k}

12) Los siguientes modelos han sido utilizados en la literatura ecológica para estudiar situaciones reales. Todos los parámetros se asumen positivos. Hallar las soluciones de equilibrio, determinando su estabilidad local (mediante linealización), así como los primeros valores de bifurcación de los parametros.

a)

$$x_{n+1} = x_n \left[1 + r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right].$$

b)

$$x_{n+1} = x_n \exp\left[r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right].$$

Solución Apartado b
Buscamos los puntos críticos $f(x) = x$.

$$\exp(r(1 - \frac{x}{K})) = 1 \iff r(1 - \frac{x}{K}) = 0 \iff x = k$$

$f'(x) = (1 - \frac{rx}{K} f(x) \Rightarrow f'(k) = 1 - r \iff 0 < r < 2$