1) a) (15 puntos) Determinar la evolución del sistema dinámico

$$x' = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$$

dada una condición inicial x_0 arbitraria.

b) (25 puntos) Hallar las soluciones de equilibrio en el siguiente modelo discreto de población, en el que todos los parámetros se asumen positivos:

$$x_{n+1} = x_n \left[1 + r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right].$$

Determinar la estabilidad local de las soluciones de equilibrio, así como el primer valor del parámetro r para el que se produce una transición (o bifurcación) en la conducta de la población.

RESPUESTAS.
a) $24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4 = \underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}_{f}$.

La evolución del sistema dinámico autónomo viene determinada por el signo de la función f: cuando $f > 0$, $x' > 0$ y por tanto $x(t)$ es creciente, mientras que si $f > 0$, $x(t)$ es decreciente. Luego

- Si $x_0 < 2$, entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ (al ser $x(t)$ creciente cuando $x_0 < 1$ y decreciente cuando $1 < x_0 < 2$, mientras que si $x_0 = 1$, entonces $x(t) = 1$ para todo $t > 0$). Es decir, $x(t) = 1$ es una solución de equilibrio que además es un atractor local, por tanto estable.
- Si $x_0 = 2$, entonces para todo $t > 0$, $x(t) = 2$ (solución de equilibrio, repulsor local).
- Si $x_0 = 3$, $x(t) = 3$ es una solución de equilibrio, y para todo x_0 tal que $2 < x_0 < 4$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$ (atractor local).
- $x_0 = 4$ es una solución de equilibrio, y para todo x_0 tal que $4 < x_0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$; repulsor local, equilibrio inestable.

b) Buscamos primero las soluciones de equilibrio resolviendo

$$f(x) = x(1 + r(1 - \frac{x}{K})) = x \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x = K.$$

Tenemos estabilidad local en el punto de equilibrio x^* si $-1 < f'(x^*) < 1$ e inestabilidad si $f'(x^*) < -1$ ó $f'(x^*) > 1$. Como $f'(0) = 1 + r > 1$, $x^* = 0$ es inestable. Como $f'(K) = 1 - r$, si $r < 2$ tenemos estabilidad en un entorno de $x^* = K$, y si $r > 2$, tenemos inestabilidad. Por tanto, la primera bifurcación se produce cuando $r = 2$.

2) a) (5 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una cadena de Markov irreducible, finita y periódica. Entonces, dada cualquier distribución inicial para X_0, la distribución límite existe y coincide con la distribución invariante.

b) (5 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una cadena de Markov irreducible, finita y periódica. Entonces los tiempos medios de retorno a cada estado se encuentran determinados por la distribución estacionaria.

c) (20 puntos) Se sabe que cierta enfermedad, en los machos de una especie con generaciones disjuntas, depende en parte de factores hereditarios. Nuevas pruebas diagnosticas revelan que la probabilidad de que un individuo esté enfermo depende de si lo estaban tanto su padre como su abuelo. Estudios estadísticos dan las siguientes relaciones:

i) Si el padre y el abuelo de un individuo padecieron la enfermedad, él la padecerá con probabilidad 0.8.
ii) Si el padre la padeció pero el abuelo no, el individuo la padecerá con probabilidad 0.6.
iii) Si el padre esta sano pero el abuelo no, el individuo la padecerá con probabilidad 0.4.
iv) Si ninguno sufrió la enfermedad, el individuo la padecerá con probabilidad 0.1.

A largo plazo, ¿que tanto por ciento de individuos estarán enfermos?

RESPUESTAS.

a) Falso. Por periodicidad, no hay una distribución límite a la que la CM converge independientemente de la distribución inicial.

b) Verdadero. Por el Teorema de Ergódico para Cadenas de Markov.

c) Para expresar el problema en términos de una CM, es necesario definir los estados teniendo en cuenta la enfermedad del hijo y la del padre: (E, E), (S, E), (E, S), (S, S). La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Hallamos la distribución estacionaria: $\frac{1}{11}(3, 1, 1, 6)$. Sumando las probabilidades de los estados (E, E) y (E, S), obtenemos $4/11$.

3) Sea $Q_n = (V, A)$ el grafo "retículo" definido por la siguiente relación $V = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in \{0, 1\}$, y $\{xy\} \in A \iff x - y = e_i$, donde los e_i son los vectores de la base canónica$\}$. Es decir, Q_n es el grafo constituido por los vértices y las aristas del cubo n-dimensional $[0, 1]^n$.

a) (6 puntos) Decidir razonadamente si existen ciclos Eulerianos y Hamiltonianos en Q_2.

b) (8 puntos) Decidir razonadamente si existen ciclos Eulerianos en Q_3 y en Q_4.

c) (8 puntos) Decidir razonadamente si Q_n es bipartito.

d) (8 puntos) Sea $G = (V, A)$ un grafo en el que $4|A| > |V|^2$, donde $|A|$ y $|V|$ denotan respectivamente el número de aristas y de vértices. Demostrar que no puede ser bipartito. Sea $G = (V, A)$ un grafo bipartito que cumple $4|A| = |V|^2$. Identificar dicho grafo, justificando la respuesta.

RESPUESTAS.

a) SI. El camino trivial es euleriano y Hamiltoniano.

b) Basta determinar el grado de los vértices. Para que exista un ciclo Euleriano es necesario y suficiente que todos los vértices tengan grado par. Por la simetría del grafo es suficiente considerar el vertice $(0, \dots, 0)$. Esta conectado a todos los vectores de la base canónica; así pues, su grado es n. Por tanto en Q_3 no hay ciclos eulerianos, y en Q_4 si.

c) Q_n ES bipartito. Definimos C_1 como el conjunto de vértices cuyas coordenadas contienen un número par de unos, y C_2 el resto de los vértices.

d) Si G es bipartito, con $|V| = r + s$, entonces $|A| \leq rs$, con igualdad cuando $G = K_{r,s}$, el grafo bipartito completo cuyas clases de vértices tienen r y s elementos respectivamente. Por hipótesis, $|V|^2 = (r + s)^2 < 4|A| \leq 4rs$, luego $(r - s)^2 < 0$. Contradicción. Por el argumento anterior, la igualdad $|V|^2 = (r + s)^2 = 4|A| = 4rs$ se da si y sólo si $r = s$. Por tanto, el grafo bipartito es $K_{r,r}$.