III) (10 puntos) Elegir la respuesta correcta a las siguientes preguntas:

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$

1) Si $P(A|B) = P(A)$, entonces A y B son independientes. V F

2) Si las v.a. X e Y son independientes, entonces $E(X|Y) = E(X)$. V F

3) Dadas dos v.a. $X, Y \in L^2$, se verifica que $\|X - E(X|Y)\|_2 \leq \|X - Y\|_2$. V F

4) Dadas dos v.a. $X, Y \in L^2$, se verifica que $\|Y - E(X|Y)\|_2 \leq \|X - Y\|_2$. V F

$\|X - E(X|Y)\|_2^2 + \|E(X|Y) - Y\|_2^2 = \|X-Y\|_2^2$ por Pitágoras

Recordatorio: $E(X|Y)$ es la proyección $\perp$ de X en $L^2(\sigma(Y))$.

5) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala en L^1, entonces para casi todo w, $\lim_{n\to\infty} X_n(w)$ existe. V F

T.C. Mart. de Doob.

6) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala en L^1, entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en L^1. V F

Ej. visto en clase

7) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala en L^2, entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en L^1. V F

T.C Mart. de Doob para $p>1$.

8) Si el vector aleatorio (X, Y) tiene distribución normal y $Cov(X, Y) = 0$, entonces las v.a. X e Y son independientes. V F Visto en clase

Para las preguntas restantes en este problema, suponemos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que $P(X_n = 2) = 2/3$, y $P(X_n = -4) = 1/3$.

9) Cuando $n \to \infty$, $\frac{1}{n^{9/17}} \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ casi seguro. V F LFGN para $1<p<2$ con $p=\frac{17}{9}$

10) Cuando $n \to \infty$, $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ casi seguro. V F

Por la ley del log. iterado, o por el TCL.

III'5) (1 punto) Sabiendo que la persona X ha contraído el virus del sida, elegir la opción más probable:

a) X es varón.
b) X es varón homosexual.
c) X es varón homosexual y heroinómano.
d) X es varón homosexual, heroinómano, comparte jeringuillas usadas y practica el sexo anal sin protección.

Sean A, B, C, D los conjuntos descritos en los correspondientes apartados, y sea V el conjunto de infectados por el VIH. Como $(A\cap V)\supset(B\cap V)\supset(C\cap V)\supset(D\cap V)$, $P(\cdot|V)$ es máxima cuando consideramos $P(A|V)$. Pregunta distinta es maximizar $P(V|\cdot)$. Suponiendo que $D\neq\emptyset$, elegiríamos $P(V|D)$. Pero como se nos dice que V ha ocurrido, no se pregunta por $P(V|\cdot)$.

IV) a) (4 puntos) Un material radioactivo emite, en media, una particula por segundo. Observamos el material hasta que detectamos la primera emisión. Si ésta ocurre en el intervalo $(n-1,n]$, decimos que la emisión ha sido observada en el segundo n. En tal caso, lanzamos n veces una moneda lastrada (se asume que los lanzamientos son independientes). Supongamos que la probabilidad de cara es 4/10, y la de cruz, 6/10. Hallar la esperanza del número de caras, condicionada al tiempo de emisión (en segundos) de la primera partícula.

b) (6 puntos) Hallar el número esperado de caras.

a) Sea T el segundo en que se observa la primera emisión, y sea S_T el número de caras obtenido. Entonces, escribiendo $S_n=\sum_1^n X_i$, $P(X_i=1)=\frac{2}{5}$, $P(X_i=0)=\frac{3}{5}$, tenemos

$$E(S_T|T=n)=E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_1^n EX_i=n\frac{2}{5},$$

o más brevemente, $E(S_T|T)=\frac{2}{5}T$.

b) Sea $Y=$ nº de particulas emitidas en una unidad de tiempo. Como $EY=1$, $Y\sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda=1$. Por tanto, $P(Y=0)=e^{-1}$, $P(Y>0)=1-e^{-1}=\frac{e-1}{e}$. Sea T el tiempo de la primera emisión. Entonces $P(T=n)=\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\left(\frac{e-1}{e}\right)$.

$$E(S_T)=E(E(S_T|T))=\sum_{n=1}^{\infty}E(S_T|T=n)P(T=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5}n\frac{e-1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{2}{5}\frac{e-1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n-1}}.$$

Sea $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$, $|t|<1$.

Una primitiva para f es $F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}$.

Por tanto, $F'(t)=f(t)=\frac{1-t-t(-1)}{(1-t)^2}=\frac{1}{(1-t)^2}$.

Tomando $t=\frac{1}{e}$, $f(e^{-1})=\frac{e^2}{(e-1)^2}$, luego

$$E(S_T)=\frac{2}{5}\frac{e-1}{e}\frac{e^2}{(e-1)^2}=\frac{2}{5}\frac{e}{e-1}.$$

V) (2 puntos) a) Enunciar la definición de submartingala.

b) (8 puntos) Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de pruebas de Bernoulli independientes, con $P(X_n = 1) = 1/10$, $P(X_n = 0) = 9/10$. Sea $\mathcal{A}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, y sea $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Decidir razonadamente si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es una submartingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$.

b) $\{\{S_n\}_{n\geq 1}, \{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}\}$ es una submartingala.

Claramente $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots \mathcal{A}$ es una filtración.

1) S_n es $\mathcal{A}_n$ medible, porque $X_1, \ldots, X_n$ son $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ medibles, y la suma de funciones medibles es medible.

2) $\forall n \geq 1$, $E|S_n| = \sum_1^n E X_i = \frac{n}{10} < \infty$, luego $S_n \in L^1$.

3) $\forall n \geq 1$ y $\omega \in \Omega$ c.s., $E(S_{n+1} | \mathcal{A}_n)(\omega) \geq S_n(\omega)$:

$$E(X_{n+1} + S_n | \mathcal{A}_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linealidad}}}{=} E(X_{n+1} | \mathcal{A}_n) + E(S_n | \mathcal{A}_n)$$

$$\underset{\uparrow}{=} E(X_{n+1}) + S_n = \frac{1}{10} + S_n > S_n.$$

por independencia de X_{n+1} y $X_1, \ldots, X_n$ y porque S_n es $\mathcal{A}_n$-medible.

Alternativamente, por positividad de $E(\cdot | \mathcal{B})$, como $X_{n+1} \geq 0$, $E(X_{n+1} | \mathcal{A}_n) \geq 0$, y por tanto $E(S_{n+1} | \mathcal{A}_n) \geq S_n$.

VI) (5 puntos) a) Sea $\{X_n\}_{n\geq 2}$ una sucesión de v.a. independientes, con $P(X_n = 1) = 1/n^2$, $P(X_n = -1) = 1/n^3$, $P(X_n = 0) = 1 - 1/n^2 - 1/n^3$. Decidir razonadamente si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en L^2, y si converge casi seguro, hallando los límites correspondientes en caso de respuesta afirmativa.

b) (5 puntos) Sea $\{X_n\}_{n\geq 2}$ una sucesión de v.a. independientes, con $P(X_n = 1) = 1/n^2$, $P(X_n = -1) = 1/n$, $P(X_n = 0) = 1 - 1/n^2 - 1/n$. Decidir razonadamente si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en L^2, y si converge casi seguro, hallando los límites correspondientes en caso de respuesta afirmativa.

Tanto en a) como en b) hay convergencia a 0 en L^2, y consiguientemente en probabilidad:

a) $\lim_{n\to\infty} \|X_n - 0\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n^2 \, dP = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 0.$

b) $\quad '' \quad = \quad '' \quad = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0.$

En a) hay convergencia a 0 c.s., y en b) no.

En lo que sigue, doy más detalles de los pedidos.

Sean $A_{1,n} = \{X_n = 1\}$, $A_{0,n} = \{X_n = 0\}$, $A_{-1,n} = \{X_n = -1\}$,

a) Como $\sum_2^\infty P(A_{1,n}) = \sum_2^n \frac{1}{n^2} < \infty$, luego por B.C.I, $P(\limsup A_{1,n}) = 0$. Es decir, $\exists\, E_1$ con $P(E_1) = 1$, t.q. si $\omega \in E_1$, $X_n(\omega) = 1$ como máximo para un número finito de n's. Del mismo modo, $P(\limsup A_{-1,n}) = 0$, luego existe un conjunto E_{-1} t.q. si $\omega \in E_{-1}$, $X_n(\omega) = -1$ como máximo para un número finito de n's, y $P(E_{-1}) = 1$. Es decir, si $\omega \in E_1 \cap E_{-1}$, $\lim_n X_n(\omega) = 0$.

b) Como antes, $P(\limsup A_{1,n}) = 0$, luego $P(\limsup_n X_n \leq 0) = 1$. Como $\{A_{0,n}\}_{n\geq 2}$ es una sucesión de conjuntos independientes con $\sum_2^\infty P(A_{0,n}) = \infty$, $P(\limsup X_n = 0) = 1$, por B.C.II. Del mismo modo, $P(\limsup A_{-1,n}) = 1$, porque $\sum_2^\infty \frac{1}{n} = \infty$. Luego $P(\liminf_n X_n = -1) = 1$, luego $\{X_n\}_{n\geq 2}$ diverge en casi todo punto.

VII) (10 puntos) a) Enunciar el Teorema de Berry-Esseen.

b) Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de pruebas de Bernoulli independientes, con $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = 0)$. Utilizamos la aproximación normal a la binomial para estimar $(\sum_1^n X_k - n/2)/(\sigma\sqrt{n})$. Determinar como de grande debe ser n, para que el error cometido al usar dicha aproximación sea menor que 1/100.

b) $p = \frac{1}{2} = EX_1 = E(|X_1|^3)$, $\sigma = \sqrt{p(1-p)} = \frac{1}{2}$.

Sabemos que $\exists\ c \in (0'4, 0,5)$ t.q. el error cometido está acotado por

$$\frac{c\, E(|X_1|^3)}{\sigma^3 \sqrt{n}} < \frac{1}{100}$$ (imponemos esta condición)

Como $c < \frac{1}{2}$, reemplazamos c por $\frac{1}{2}$!

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}\sqrt{n}} < \frac{1}{100} \iff 200 < \sqrt{n}$$

$\iff 40\,000 < n$.

<u>Comentario</u>: A veces en la vida es útil ser capaz de calcular expresiones tales como 200^2 (por ejemplo, en este examen). En general, por una atrocidad aritmética he quitado un sólo punto (de 10). Por muchas, he quitado más.