II) Elegir la respuesta correcta a las siguientes preguntas:

1) Si $P(A), P(B) > 1/2$, entonces las v.a. $\mathbf{1}_A$ y $\mathbf{1}_B$ están positivamente correlacionadas. V F

Basta tomar A, B con $PA, PB > \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) < \frac{1}{4}$. Entonces $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = E\,\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - E\mathbb{1}_A E\mathbb{1}_B < 0$.

2) Si A y B son independientes, y $P(C) > 0$, entonces $P(A \cap B|C) = P(A|C)\ P(B|C)$. V F

indep $\not\Rightarrow$ indep. condicional. Ej: lanzamos una moneda equilibrada 2 veces, A= cara en el primer lanzamiento, B= cruz en el segundo, C= sale lo mismo en ambos lanzamientos.

3) Si $P(C) > 0$ y $P(A \cap B|C) = P(A|C)\ P(B|C)$, entonces A y B son independientes. V F

indep. cond. $\not\Rightarrow$ indep. Ejemplo anterior pero con $C = A$= sale lo mismo las 2 veces, B= salen 2 caras.

4) Si A y B son independientes, y $P(C) = 1$, entonces $P(A \cap B|C) = P(A|C)\ P(B|C)$. V F

y 5) Como $P(C) = P(\Omega) = 1$, da lo mismo usar C ó Ω.
$P(A \cap B|C) = P(A \cap B)$, $P(A) = P(A|C)$ y $P(B) = P(B|C)$.

5) Si $P(C) = 1$ y $P(A \cap B|C) = P(A|C)\ P(B|C)$, entonces A y B son independientes. V F

6) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala en L^2, entonces $\{X_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala en L^1. V F

Si $\{X_n\}$ modeliza un juego justo (a veces ganamos, a veces perdemos) entonces $\{X_n^2\}$ modelizará un juego favorable ($X_n^2 \geq 0$ siempre).

7) Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y $P(\limsup_n X_n \leq 1) < 1/2$, entonces $P(\limsup_n X_n \leq 1) < 1/3$. V F $\{\limsup_n X_n\}$ pertenece a la σ-álgebra terminal, luego por Kolmogorov 0-1, su probabilidad es 0 ó 1.

8) Si $E(X) = 1$ y $\mathrm{Var}(X) = 1$, entonces y $P(X \geq 11) \leq 1/100$. V F Por Chebyshev:

$$P(X-1 \geq 10) \leq P(|X-1| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}\,X}{10^2}.$$

9) La función característica de una v.a. Z con distribución $N(0,1)$ es $\phi_Z(t) = \exp(-t^2/2)$. V F

Calcular $\phi_Z(t) = E\,e^{itZ}$ (Hoja 7, prob. 6)

10) La función característica de una v.a. Y con distribución $N(\mu, \sigma)$ es $\phi_Y(t) = \exp(i\mu t - (\sigma t)^2/2)$. V F

$\phi_{\sigma Z + \mu}(t) = E(e^{it(\sigma Z + \mu)}) = e^{it\mu} E\, e^{it\sigma Z}$ y aplicamos el resultado anterior, con σt en vez de t.

III) (10 puntos) Dado el espacio de probabilidad $(0,1]$, con los conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue (la probabilidad uniforme) sea $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ la sucesión de v.a. $X_n : (0,1] \to [0,1]$ definida mediante $X_n := \mathbf{1}_{(1/n,1]}$.

a) (3 puntos) Decidir razonadamente para qué valores de $p \in (0,\infty]$ la sucesión $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ converge en L^p, determinando el límite en caso de existir.

b) (2 puntos) Decidir razonadamente si la sucesión $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ converge en casi todo punto, en probabilidad, y en distribución, determinando el límite en caso de existir.

c) (2 puntos) Sea $\mathcal{B} := \sigma(\{(0,1/2],(1/2,1]\})$. Hallar $E(X_n|\mathcal{B})$ para $n \geq 2$.

d) (3 puntos) Responder a los apartados anteriores a) y b) pero usando la sucesión $\{E(X_n|\mathcal{B})\}_{n=2}^{\infty}$ en vez de $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$.

a) $\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},1]} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{1}_{(0,1]}$ en L^p, $0<p<\infty$, pero no en L^∞.

Caso $p=\infty$: $\|\mathbb{1}_{(0,1]} - \mathbb{1}_{(\frac{1}{n},1]}\|_\infty = \|\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n}]}\|_\infty = 1 \not\to 0$.

Caso $0<p<\infty$:

$$\|\mathbb{1}_{(0,1]} - \mathbb{1}_{(\frac{1}{n},1]}\|_p^p = \int \mathbb{1}^p_{(0,\frac{1}{n}]} = \int_0^{\frac{1}{n}} 1 = \frac{1}{n} \to 0$$

b) Converge en todo punto, por tanto en prob. y en dist.
Dado $\omega \in (0,1]$, $\forall\, n > \frac{1}{\omega}$, $\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},1]}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_{(0,1]}(\omega)$.

c) Como $\mathcal{B}$ está generada por una partición, para hallar $E(X_n|\mathcal{B})$ calculamos el promedio de X_n en cada subintervalo $(0,\frac{1}{2}]$ y $(\frac{1}{2},1]$: Si $\omega \in (\frac{1}{2},1]$, $X_n \equiv 1$ en $(\frac{1}{2},1]$, luego $E(X_n|\mathcal{B})(\omega) = 1$. Si $\omega \in (0,\frac{1}{2}]$

$$E(X_n|\mathcal{B})(\omega) = \frac{1}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{(\frac{1}{n},1]}(x)\,dx = 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} 1 = 1 - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n}$$

d) $E(X_n|\mathcal{B}) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{1}_{(0,1]}$ en todos los sentidos:

$p=\infty$, $\|\mathbb{1}_{(0,1]} - E(X_n|\mathcal{B})\|_\infty = \|\frac{2}{n}\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{2}]}\|_\infty = \frac{2}{n}$
$\to 0$ cuando $n \to \infty$.

Como converge en L^∞, converge c.s., converge $\forall\, p \in (0,\infty)$, y por tanto, converge en prob. y en dist.

IV) a) (1 punto) Enunciar la condición de Lindeberg.
b) (2 puntos) Enunciar el Teorema Central del Límite de Lindeberg-Feller, para configuraciones triangulares.
c) (2 puntos) Enunciar la Ley de los Números Pequeños.
d) (5 puntos) Para cada $n \geq 1$, sea $\{X_{n,m}\}_{m=1}^{n}$ una sucesión de v.a. independientes, con distribución Bernoulli$(2/n)$. Calcular $\lim_n P(\sum_{m=1}^{n} X_{n,m} \geq 3)$.

d) Tomamos $\lambda = \sum_{1}^{n} \frac{2}{n} = 2$. Como $\frac{2}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, la ley de los números pequeños es aplicable, es decir, $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{m=1}^{n} X_{n,m} \geq 3) = P(Y \geq 3)$

$= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2)$, donde $Y \sim \text{Poisson}(2)$.

$P(Y=0) = e^{-2}$, $P(Y=1) = e^{-2} \cdot 2$

$P(Y=2) = e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}$. Por tanto,

$P(Y \geq 3) = 1 - \frac{5}{e^2}$.