Para el Lunes 23/3/2015. Se pueden entregar los problemas individualmente o en grupo. Hacerlo en grupo no penaliza. Quienes entreguen en grupo, por favor que escriban sus nombres en orden alfabético, para minimizar errores al copiar las notas.

Salvo afirmación expresa en sentido contrario se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-$\sigma$-álgebra, que las funciones son medibles, etc.

Recordatorio: si $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$, mientras que $\|f\|_\infty$ denota el supremo esencial de $|f|$. De hecho, la definición $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ tiene sentido para cualquier $p > 0$ finito, pero puede demostrarse que si $p < 1$ esta expresión no define una norma.

**1)** Sea $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde $\mu$ es una medida. Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para todo conjunto $A$ con $\mu(A) \leq \delta$, $\int_A |Y| d\mu < \varepsilon$.

Sugerencia: aplicar Convergencia Monótona a $Y_n := |Y| \mathbf{1}_{\{|Y| \leq n\}}$.

**2)** Sea $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$ una filtración de sub-$\sigma$-álgebras de $\mathcal{A}$, y sea $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Como $X_n := E(Y|\mathcal{A}_n)$ define una martingala en $L^1$, el límite $X_\infty := \lim_n X_n$ existe casi seguro. Probar que $X_n$ converge a $X_\infty$ en $L^1$. Concluir que para todo $n \geq 0$, $X_n = E(X_\infty|\mathcal{A}_n)$. Hallar la relación entre $Y$ y $X_\infty$. Decidir razonadamente si $X_n = E(X_\infty|\mathcal{A}_n)$.

Sugerencia: usar el ejercicio anterior.

**3)** Probar que existe una submartingala $X := \{S_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $Y := \{|S_n|\}_{n=0}^\infty$ no es una submartingala.

Sugerencia: Para construir dicha submartingala, considerar la fortuna obtenida en tiempo $n$ cuando ganamos un euro con probabilidad $p$, para algún $p \in (1/2, 1)$, y perdemos un euro con probabilidad $1 - p$.